

CARGAS DE COLAPSO DE SISTEMAS DE ALVENARIA

Por:

Nuno André Martins Deusdado

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade Nova de Lisboa
para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil
na especialidade de Estruturas

Orientador: Professor Doutor Armando Manuel Sequeira Nunes Antão

Monte de Caparica, 2011

Agradecimentos

Dedico este espaço a todos os que contribuíram para que esta dissertação fosse realizada. Aos meus colegas, professores, amigos e familiares, em especial:

Ao meu **avô**, por transmitir os princípios da família Deusdado;

Aos meus **pais**, pela compreensão, carinho, apoio, paciência, orientação pessoal e pelos valores que me transmitiram;

Ao meu **irmão**, por responder às inúmeras questões que lhe coloco.

À minha **namorada**, por todo o amor, por aturar todos os disparates que faço e por estar sempre do meu lado;

Um agradecimento especial ao meu orientador, **Professor Doutor Armando Nunes Antão**, pela forma como orientou o meu trabalho. As notas dominantes da sua orientação foram a utilidade das suas recomendações e a cordialidade com que sempre me recebeu. Estou grato por ambas e pela oportunidade de realizar este trabalho sob sua orientação, que foi decisivo para que este trabalho contribuisse para o meu desenvolvimento pessoal.

Agradeço também ao **Professor Doutor Mário Vicente da Silva**, pela paciência e disponibilidade apresentada para solucionar todas as propostas que lhe foram colocadas com o desenvolvimento deste trabalho.

Agradece-se ao **projecto de investigação PTDC/ECM/70368/2006**, por possibilitar a plataforma informática que tornou possível a realização de alguns cálculos desta dissertação.

Sem todos vós, este trabalho não seria possível.

Aqui deixo o meu agradecimento simples, mas muito sincero: *Muito Obrigado!!!*

Resumo

Esta dissertação é baseada na ferramenta SUBLIM3d que é fundamentada no teorema cinemático da análise limite, que visa o cálculo de limites superiores estritos de cargas de colapso de estruturas [1]. A utilização desta ferramenta deve-se à análise limite ter vindo a demonstrar um vasto potencial para o desenvolvimento de modelos numéricos, que permitem a determinação da máxima carga suportada por uma estrutura caracterizada por um comportamento perfeitamente plástico.

No presente documento, pretende-se validar a ferramenta SUBLIM3d para um caso particular das estruturas, por isso, limita-se este estudo a paredes de alvenaria não reforçada. Adoptou-se neste estudo condições de deformação plana e considerou-se apenas carregamentos no plano.

O comportamento da alvenaria é controlado pelas propriedades mecânicas das unidades e das juntas, bem como pela orientação e posição relativa destas. Por isso, trata-se a alvenaria como um material anisotrópico e heterogéneo.

A modelação da alvenaria baseou-se na modelação micro simplificada, em que resumidamente, as unidades são representadas por elementos contínuos e o comportamento das juntas e dos interfaces unidade/junta são substituídos por uma única superfície que é constituída por elementos de junta. Para cada elemento considerou-se que se podia associar a superfície de cedência de Mohr-Coulomb ou as duas superfícies de cedência propostas (Armando Nunes Antão e Mário Vicente da Silva).

Com o objectivo de validar e aferir a capacidade das formulações propostas, a solução obtida pelo SUBLIM3d para os vários exemplos numéricos é comparada com os resultados experimentais e teóricos disponíveis na literatura.

Abstract

This dissertation is based on SUBLIM3d tool which is grounded on the kinematic theorem of limit analysis, that aims to calculate the strict upper bounds of collapse loads of structures[1]. The use of this tool was due to the fact that the limit analysis has come to show a great potential for development of numerical models, which allows the determination of the maximum load supported by a structure characterized with a perfectly plastic behavior.

This document intends to validate the SUBLIM3d tool for the particular case of non-reinforced masonry walls structures. Plane strain conditions were adopted only loads in the plan of the wall were considered.

The behavior of masonry is controlled by the mechanical properties of the units and joints as well as by their relative position and orientation. Due to these reasons, the masonry is treated as an anisotropic and heterogeneous material.

The shaping of the masonry was based on simplified micro modeling, in which the units are represented by continuous elements and the behavior of joints and interfaces unit/joint are replaced by a single surface that consists of joint elements. For each element was considered that could be associate the yield surface of Mohr-Coulomb or the two yield surfaces proposed (Armando Nunes Antão and Mário Vicente da Silva).

In order to validate and assess the capacity of the proposed formulations the solution obtained by SUBLIM3d for several numerical examples is compared with experimental and theoretical results available in literature.

Simbologia e Notações

Maiúsculas latinas

| | |
|--------------------------|--|
| B | Operador padrão de compatibilidade diferencial |
| C | Matriz de amortecimento |
| C | Carregamento tangencial |
| C_c | Espaço auxiliar que confina a taxa do tensor da deformação plástica admissível |
| C_d | Espaço que confina as descontinuidades do campo de velocidade |
| D | Matriz flexibilidade |
| D | Taxa da dissipação da energia plástica interna total por unidade de volume |
| E | Módulo de Young |
| F | Força aplicada no corpo |
| F | Vector das cargas nodais |
| F_{cont} | Forças de contacto entre as partículas |
| F_{elem} | Forças geradas através dos elementos lineares de vínculo entre duas partículas |
| F_{ext} | Ações externas |
| F_{int} | Esforços internos |
| F_s | Resistência limite ao corte |
| F_t | Resistência limite à tracção |
| F_1 | Tensão principal horizontal aplicada ao painel |
| F_2 | Tensão principal vertical aplicada ao painel |
| G | Módulo de distorção |
| H | Carregamento normal |
| H | Força horizontal de cedência |
| K | Matriz de rigidez |
| K_a | Coefficiente de impulso activo |
| K_p | Coefficiente de impulso passivo |
| L | Função Lagrangiana aumentada na cedência |
| L | Largura do corpo |
| L | Largura do tijolo |
| L^* | Função que define o problema de minimização local |
| M | Matriz de massa |
| N_i | Matriz que reúne as funções de aproximação da forma nodal convencional do elemento i |
| O | Ponto de origem do sistema de coordenadas |
| OC | Distância desde a origem do sistema de coordenadas ao centro do círculo de Mohr |
| Q_j | Conjunto genérico de carregamento |
| Q_k | Conjunto genérico de carregamento |
| R | Raio do círculo de Mohr |
| R^c | Raio do círculo de Mohr no estado de tensão no colapso |
| R^t | Raio do círculo de Mohr no estado de tensão que origina a truncatura |
| T | Matriz de transformação |
| T_c | Truncatura à compressão |
| T_t | Truncatura à tracção |
| $U_{\Gamma i}$ | Matriz que reúne as funções de aproximação ao campo das velocidades relativas na fronteira dos elementos |
| V | Carregamento normal |
| V | Força vertical total aplicada à alvenaria |
| $V_{viga}^{considerado}$ | Volume considerado da viga de betão reforçado |
| V_{viga}^{real} | Volume real da viga de betão reforçado |
| W_D | Taxa de dissipação da energia plástica interna |
| W_e | Taxa do trabalho das forças exteriores aplicada ao sistema |
| $W_{elástico}$ | Trabalho elástico |
| W_λ | Taxa do trabalho das forças variáveis |

| | |
|-------------|--|
| \bar{W} | Taxa do trabalho das forças fixas |
| \dot{W}_e | Taxa do trabalho elástico |
| \dot{W}_p | Taxa do trabalho plástico |
| Y_i | Matriz formada pelos valores próprios normalizados da matriz S_i |

Minúsculas latinas

| | |
|--|---|
| a | Altura dos tijolos |
| b | Largura dos tijolos |
| b | Forças de massa constantes por unidade de volume (afectadas pelo multiplicador) |
| b | Largura da parede |
| b_j | Componente na direcção j do vector das forças de massa |
| \tilde{b} | Forças de massa constantes por unidade de volume não afectadas pelo multiplicador |
| c | Coesão do material |
| d | Vector dos deslocamentos nodais |
| d | Graus de liberdade de um nó virtual |
| d | Vector das velocidades nodais |
| d_i | Vector que agrupa a velocidade nodal do elemento i |
| \bar{d}_i | Graus de liberdade de um nó genérico que pertence a um dos elementos que constituem o corpo rígido |
| $d_x; d_y; d_z$ | Componentes da velocidade do nó virtual |
| $d_{\theta_x}; d_{\theta_y}; d_{\theta_z}$ | Componentes da velocidade angular do nó virtual |
| $\bar{d}_x; \bar{d}_y; \bar{d}_z$ | Componentes da velocidade de um nó genérico que pertence a um dos elementos que constituem o corpo rígido |
| e | Espessura da junta |
| e_i | Vector que junta os valores aproximados das componentes da taxa de deformação plástica |
| \tilde{e}_i | Vector que guarda as componentes principais da aproximação do tensor da taxa de deformação |
| \tilde{e}_u | Solução sem restrições para a qual a função objectivo atinge o seu valor mínimo |
| $\tilde{e}^1; \dots; \tilde{e}^n$ | Candidatos que minimizam a função objectivo |
| f | Função que define o critério/superfície de cedência, no caso das regras de escoamento associadas |
| f_c | Resistência média à compressão dos tijolos |
| g | Função que define o critério/superfície de cedência, no caso das regras de escoamento não associadas |
| h | Altura da parede de alvenaria |
| i | Direcção |
| i | Número do elemento finito |
| i | Número do nó genérico que pertence a um dos elementos que constituem o corpo rígido |
| i | Número do inter – elemento |
| j | Direcção |
| k | Constante |
| k | Número da iteração |
| k | Rigidez |
| l | Largura da parede de alvenaria |
| m | Número de ciclos de relaxação interior |
| m | Parâmetro adimensional que corresponde a duas vezes o rácio entre a altura e largura do tijolo |
| m | Base do leque |
| n | Versor da normal exterior à fronteira |
| n | Componente normal |
| n | Número de candidatos que minimizam a função objectivo |
| n_E | Número da malha dos elementos |
| q_{ri} | Vector que agrupa a velocidade relativa nodal do inter – elemento i |
| r | Parâmetro de penalidade para os elementos regulares |

| | |
|------------------------|--|
| r_p | Parâmetro de penalidade para os elementos degenerados |
| r_0 | Parâmetro de penalidade inicial |
| s_i | Vector que contem as componentes do tensor S_i |
| \tilde{s}_i | Vector que reúne os valores próprios do tensor S_i |
| t | Forças de superfície externas (afectadas pelo multiplicador) |
| t | Componente tangencial |
| t | Espessura da parede |
| t_0 | Forças de superfície externas iniciais |
| \tilde{t} | Forças de superfície externas não afectadas pelo multiplicador |
| u | Campo de deslocamentos |
| u_0 | Campo de deslocamentos inicial |
| \dot{u} | Tensor da taxa dos deslocamentos |
| \dot{u} | Campo das velocidades |
| $\dot{u}^+; \dot{u}^-$ | Campo das velocidades das duas regiões delimitadas pela fronteira Γ_d |
| \ddot{u} | Campo das acelerações |
| x | Ponto de tensão |
| x | Ponto do interior do corpo |

Maiúsculas gregas

| | |
|-----------------|---|
| Ω | Domínio do corpo |
| Ω | Volume do corpo |
| Γ | Superfície do corpo |
| Γ_d | Região da superfície Γ onde ocorrem as descontinuidades do campo de velocidade |
| Γ_u | Região da superfície Γ , representada pelas condições de fronteira cinemática |
| Γ_σ | Região da superfície Γ , representada pelas condições de fronteira estáticas |
| Δ_p | Volume do elemento degenerado |
| Ψ | Ângulo que a superfície de deslizamento faz com a horizontal |
| Ψ | Ângulo que relaciona a F_2 com a F_1 |

Minúsculas gregas

| | |
|--|---|
| λ | Multiplicador |
| λ | Parâmetro de carregamento não dimensional |
| λ_c | Mínimo valor da região superior do multiplicador da carga de colapso (cedência) |
| λ^{exp} | Valor experimental do λ no colapso |
| λ^* | Ultimo valor de λ |
| λ^+ | Valor da região superior de λ^* |
| ε | (Campo das) Deformação |
| ε_e | Deformação elástica |
| ε_p | Deformação plástica |
| ε_T | Deformação total plástica |
| $\dot{\varepsilon}$ | Componentes contínuas da deformação plástica |
| $\dot{\varepsilon}$ | Taxa das deformações |
| $\dot{\varepsilon}$ | Tensor de deformação plástica |
| $\dot{\varepsilon}$ | Campos da taxa de deformação plástica |
| $\dot{\varepsilon}_e$ | Tensor da taxa de deformação elástica |
| $\dot{\varepsilon}_p$ | Taxa de deformação plástica |
| $\dot{\varepsilon}_I, \dot{\varepsilon}_{II}, \dot{\varepsilon}_{III}$ | Tensores principais da taxa de deformação (elástica) |
| $\dot{\varepsilon}_I^p, \dot{\varepsilon}_{II}^p, \dot{\varepsilon}_{III}^p$ | Tensores principais da taxa de deformação plástica |
| μ | Vectores colectores dos multiplicadores de Lagrange |
| μ^k | Valor do vector μ na iteração K |
| μ_λ | Vectores colectores dos multiplicadores de Lagrange na cedência |
| α | Multiplicador plástico |
| σ | Tensão (normal) |
| σ | Estado de tensão final |
| σ | Tensor de tensão |
| σ^c | Ponto de tensão principal no estado de colapso |

| | |
|---------------------------------------|---|
| σ^i | Ponto de tensão principal no estado inicial |
| σ^f | Ponto de tensão principal no estado que origina a truncatura |
| σ_{AVg} | Tensão média (centro do círculo de Mohr) |
| σ_H | Tensão horizontal total equivalente aplicada na estrutura da alvenaria com $\theta=90^\circ$ |
| σ_{Hf} | Tensão horizontal fixa equivalente aplicada na estrutura da alvenaria com $\theta=90^\circ$ |
| σ_{HV} | Tensão horizontal variável equivalente aplicada na estrutura da alvenaria com $\theta=90^\circ$ |
| σ_n | Tensão normal na junta; |
| σ_t | Tensão de tracção aplicada à alvenaria |
| σ_V | Tensão vertical total equivalente aplicada na estrutura da alvenaria com $\theta=90^\circ$ |
| σ_{Vf} | Tensão vertical fixa equivalente aplicada na estrutura da alvenaria com $\theta=90^\circ$ |
| σ_{VV} | Tensão vertical variável equivalente aplicada na estrutura da alvenaria com $\theta=90^\circ$ |
| σ_x | Tensão na direcção x |
| σ_y | Tensão de cedência |
| σ_y | Tensão na direcção y |
| $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ | Tensores principais da tensão |
| σ_I | Tensão principal vertical aplicada ao painel |
| σ_2 | Tensão principal horizontal aplicada ao painel |
| σ^* | Estado de tensão inicial |
| $\sigma_I^c, \sigma_{II}^c$ | Tensores principais da tensão no estado de colapso |
| τ | Tensão de corte (na junta) |
| τ | Tensão de corte total equivalente aplicada na estrutura da alvenaria com $\theta=90^\circ$ |
| $\tau_{m\acute{a}x}$ | Tensão de corte máxima do critério de Mário Vicente da Silva |
| $\tau_{m\acute{a}x}$ | Tensão de corte máxima do círculo de Mohr no estado de tensão que origina a truncatura ao corte |
| τ_{xy} | Tensão de corte |
| ν | Coeficiente de Poisson |
| \hat{v} | Componentes descontínuas da deformação plástica |
| \hat{v} | Campo das velocidades relativas na fronteira dos elementos |
| γ | Distorção |
| γ | Peso específico dos blocos |
| $\gamma_{B.R.}$ | Peso específico do betão reforçado |
| $\gamma_{E.B.R.}$ | Peso específico equivalente do betão reforçado |
| γ_1 | Plano de carregamento vertical |
| γ_2 | Plano de carregamento horizontal |
| \underline{x} | Velocidade do ponto O |
| ρ | Parâmetro adimensional que corresponde ao rácio entre a altura e a largura da parede |
| φ | Ângulo de atrito interno do material |
| θ | Ângulo de inclinação do plano de suporte da parede |
| θ | Ângulo de inclinação da gravidade |
| θ | Ângulo entre a junta horizontal e a tensão vertical |
| θ^{lim} | Ângulo θ limite em que o colapso da parede foi observado |
| δ | Espessura do elemento degenerado |

Abreviaturas/Traduções

| | |
|---------------------------------|--|
| ACI | American Concrete Institute (Instituto de Betão Americano) |
| alt | Altura dos tijolos |
| CEN | Comité Européu de Normalização |
| Collapse load multiplier | Multiplicador de colapso |
| comp | Largura dos tijolos |
| Convert -n | Programa que permite a conversão do formato Ansys para o formato SUBLIM3d |
| CPU | Central Processing Unit (Unidade de processamento central) |
| CPU Time | Tempo de cálculo despendido pelo CPU |
| DEC | Departamento de Engenharia Civil, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (http://www.dec.fct.unl.pt/) |

Simbologia e Notações

| | |
|---------------------------------|---|
| Dismesh | Programa que permite a criação da malha das juntas no formato Ansys |
| DOF | <u>D</u> egrees of <u>f</u> reedom (Graus de liberdade) |
| Elapsed Time | Duração total do cálculo |
| Elem_altura | Número de elementos existentes na altura de cada tijolo |
| Elem_comp | Número de elementos existentes na largura de cada tijolo |
| erro | Erro de compatibilidade |
| esp | Espessura dos tijolos |
| FASE 1 | Minimização global |
| FASE 2 | Minimização local |
| FRP | <u>F</u> iber- <u>R</u> einforced <u>P</u> olymer (Polímero reforçado por fibras) |
| Geocluster | Sistema de processamento em paralelo |
| máx. | <u>M</u> áximo |
| Max. Compatibility error | <u>M</u> aximum <u>c</u> ompatibility <u>e</u> rror (Erro de compatibilidade máximo) |
| MED | <u>M</u> étodo de <u>E</u> lementos <u>D</u> iscretos ou <u>M</u> étodo de <u>E</u> lementos <u>D</u> istintos |
| MEF | <u>M</u> étodo de <u>E</u> lementos <u>F</u> initos |
| n° fiadas | Número de fiadas |
| n° tijolos por fiada | Número de tijolos que constituem cada fiada |
| nrblocosi | Número de tijolos inteiros existentes em cada fiada |
| nrlinhasi | Número de fiadas ímpar |
| nrlinhasp | Número de fiadas par |
| nr. of total iter. | <u>N</u> umber of <u>t</u> otal <u>i</u> teration (Número total de iterações) |
| offseti | Largura do primeiro tijolo da fiada ímpar |
| offsetp | Largura do primeiro tijolo da fiada par |
| p.e.e.d.v.b.r | <u>P</u> eso <u>e</u> specífico <u>e</u> quivalente e <u>d</u> istribuído da <u>v</u> iga de <u>b</u> etão <u>r</u> eforçado |
| Prep_calc3d | Comando final que permite a conclusão do ficheiro gerador de malhas |
| Script_masonry_2d | Programa que permite a criação da malha dos tijolos no formato Ansys |
| SUBLIM3d | <u>S</u> trict <u>U</u> pper <u>B</u> ound <u>L</u> imit analysis code (http://www.dec.fct.unl.pt/projectos/SUBLIM3d/) |
| SW | <u>S</u> hear <u>W</u> all (Parede de corte) |
| TOL | Tolerância |
| 2D | Bidimensional |
| 3D | Tridimensional |

Símbolos matemáticos

| | |
|---------------------------------|---|
| R^2 | Domínio real de uma função com duas variáveis |
| R^+ | Reais positivos |
| R_0^+ | Reais positivos incluindo o zero |
| \cdot | Produto contraído (ou contracção dupla) entre dois tensores da mesma ordem |
| $:$ | Produto interno |
| $:$ | Que verifique |
| $:$ | Resulta |
| $A \stackrel{C}{\Rightarrow} B$ | A equação A simplifica-se na equação B, através da condição C |
| \equiv | Congruente |
| $... $ | Módulo |
| Min A | Mínimo da função A |
| $tr(...)$ | Traço |
| $\{-\}$ | Vector |
| $[-]$ | Matriz |
| $^{-T}$ | Transposta de uma matriz |
| $^{-I}$ | Inverso de uma matriz |
| $A(x,...,y)$ | Função A que depende das variáveis x, ..., y |
| $\dots_{i,j}$ | Derivada parcial da componente i de um vector em função da j-ésima variável |
| $\frac{\partial i}{\partial j}$ | Derivada parcial da componente i de um vector em função da j-ésima variável |

$\nabla A(x, y)$ Nabla - Gradiente da função escalar A : $\nabla A(x, y) = \left(\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y} \right)^T$

$\int_i dx$ Integral no corpo i em ordem a x

\sum_i^f Somatório de i até f

$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ Sistema de equações, formado pelas equações A e B

Índice

| | |
|---|-----------|
| Agradecimentos | i |
| Resumo | iii |
| Abstract | v |
| Simbologia e Notações | vii |
| Índice de Figuras..... | xvii |
| Índice de Tabelas..... | xxi |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Motivação..... | 1 |
| 1.2 Objectivo | 2 |
| 1.3 Metodologia | 3 |
| 1.4 Organização do documento | 6 |
| 2 Definição do Problema..... | 7 |
| 2.1 Considerações iniciais | 7 |
| 2.2 Caracterização dos Sistemas de alvenaria | 7 |
| 2.3 Comportamento do Material | 12 |
| 2.3.1 Fundamentos da teoria da elasto-plasticidade | 12 |
| 2.3.1.1 Parcela elástica | 12 |
| 2.3.1.1.1 Definição/Solução do tipo de problema | 13 |
| 2.3.1.2 Parcela plástica..... | 15 |
| 2.3.2 Leis constitutivas | 20 |
| 2.3.2.1 Definição/Considerações do tipo de problema | 20 |
| 2.3.3 Estados planos..... | 21 |
| 2.4 Métodos de Resolução do problema | 22 |
| 2.4.1 Análise Limite | 24 |
| 2.4.1.1 Teorema da região inferior (Teorema Estático) | 25 |
| 2.4.1.2 Teorema da região superior (Teorema Cinemático)..... | 26 |
| 2.5 Funções de dissipação | 27 |
| 2.5.1 Critério de Mohr-Coulomb | 28 |
| 2.5.2 Critério de Armando Nunes Antão..... | 29 |
| 2.5.3 Critério de Mário Vicente da Silva..... | 31 |
| 3 Ferramenta de cálculo | 35 |
| 3.1 Formulação numérica | 35 |
| 3.1.1 Modelação das descontinuidades (Elementos de junta) | 37 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 3.1.2 | Elementos de Corpo Rígido | 39 |
| 3.2 | Algoritmo de programação matemático | 40 |
| 3.2.1 | Minimização global (<i>FASE 1</i>) | 41 |
| 3.2.2 | Minimização local (<i>FASE 2</i>) | 43 |
| 3.2.2.1 | CrITÉrio de Mohr – Coulomb [25] | 44 |
| 3.2.2.2 | CrITÉrio de Armando Nunes Antão | 45 |
| 3.2.2.3 | CrITÉrio de Mário Vicente da Silva | 47 |
| 4 | Validação..... | 51 |
| 4.1 | CrITÉrio de Armando Nunes Antão | 53 |
| 4.2 | CrITÉrio de Mário Vicente da Silva | 58 |
| 5 | Aplicações Numéricas..... | 63 |
| 5.1 | Programas..... | 63 |
| 5.1.1 | Bases SUBLIM3d | 63 |
| 5.1.2 | Desenvolvimento do programa gerador da malha | 64 |
| 5.1.3 | Criação do ficheiro de comandos possibilitando a geração de malhas..... | 66 |
| 5.2 | Exemplos..... | 67 |
| 5.2.1 | Exemplos de aplicação de critérios sem truncatura..... | 67 |
| 5.2.1.1 | Exemplo 1 | 68 |
| 5.2.1.1.1 | Definição..... | 68 |
| 5.2.1.1.2 | Resultados experimentais/Propostas..... | 69 |
| 5.2.1.1.3 | Simplificações/Considerações | 71 |
| 5.2.1.1.4 | Resultados SUBLIM3d..... | 75 |
| 5.2.1.1.5 | Discussão dos resultados..... | 78 |
| 5.2.1.2 | Exemplo 2 | 80 |
| 5.2.1.2.1 | Definição..... | 80 |
| 5.2.1.2.2 | Resultados experimentais/Propostas..... | 82 |
| 5.2.1.2.3 | Simplificações/Considerações | 85 |
| 5.2.1.2.4 | Resultados SUBLIM3d..... | 88 |
| 5.2.1.2.5 | Discussão dos resultados..... | 93 |
| 5.2.2 | Exemplo de aplicação de critérios com truncatura (Exemplo 3)..... | 96 |
| 5.2.2.1 | Definição..... | 96 |
| 5.2.2.2 | Resultados experimentais/Propostas..... | 98 |
| 5.2.2.3 | Simplificações/Considerações | 101 |
| 5.2.2.4 | Resultados SUBLIM3d..... | 105 |
| 5.2.2.5 | Discussão dos resultados..... | 118 |

Índice

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.2.3 | Considerações finais..... | 121 |
| 6 | Conclusões e Desenvolvimentos futuros | 123 |
| 6.1 | Conclusão | 123 |
| 6.2 | Desenvolvimentos futuros | 124 |
| | Bibliografia | 125 |

Índice de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 2.1 – Sistemas de alvenaria: Exemplos de alvenaria (a) Simples (b) Armada (c) Pré-esforçada (d) Confinada (adaptada de [20]) | 8 |
| Figura 2.2 – Classificação das unidades em relação às características geométricas da respectiva furação: Unidades (a) Maciças; (b) com Furação Horizontal; (c) com Furação Vertical [20]..... | 9 |
| Figura 2.3 – Tipos de alvenaria de pedra: Alvenaria de (a) Cascalho; (b) Blocos sem alinhamento; (c) Blocos com alinhamento [21] | 10 |
| Figura 2.4 – Tipos de disposição da alvenaria de tijolos/blocos: Ligação (a) Americana; (b) Inglesa (ou cruzada); (c) Flamengo; (d) Tipo monte; (e) Alternada (ou comum) [21]..... | 10 |
| Figura 2.5 – Tipos de secção transversal da alvenaria [21] | 10 |
| Figura 2.6 – Estratégias de modelação para alvenarias simples: (a) Amostra de alvenaria; (b) Modelação micro detalhada; (c) Modelação micro simplificada; (d) Modelação macro (adaptada de [6]) | 11 |
| Figura 2.7 – Diagrama tensão-deformação típico em condições uniaxiais..... | 12 |
| Figura 2.8 – Domínio elástico definido pela superfície de Coulomb – Hipótese de tensão plana..... | 13 |
| Figura 2.9 – Definição do tipo de problema..... | 14 |
| Figura 2.10 – Fase de descarregamento, no regime plástico..... | 16 |
| Figura 2.11 – Domínio plástico definido pela superfície de cedência de Coulomb – Hipótese de tensão plana | 17 |
| Figura 2.12 – Caso particular da normalidade (superfície de Cedência de Coulomb) – Hipótese de tensão plana | 17 |
| Figura 2.13 – Consequência do trabalho plástico máximo: Convexidade [1] | 18 |
| Figura 2.14 – Dissipação numa superfície de cedência não estritamente convexa [1] | 19 |
| Figura 2.15 – Diagrama tensão-deformação de um corpo rígido perfeitamente plástico | 20 |
| Figura 2.16 – Domínio dos carregamentos admissíveis [1]..... | 25 |
| Figura 2.17 – Critério de cedência de Mohr - Coulomb | 28 |
| Figura 2.18 – Representação gráfica da superfície de cedência de Mohr-Coulomb [1] | 28 |
| Figura 2.19 – Superfície de cedência de Mohr-Coulomb em duas dimensões – Hipótese de tensão plana | 29 |
| Figura 2.20 – Critério de cedência proposto em [4] | 30 |
| Figura 2.21 – Comparação do modelo de interface composto[6] com o critério de Armando Nunes Antão[4] | 31 |
| Figura 2.22 – Critério de cedência proposto em [5] | 32 |
| Figura 2.23 – Comparação do critério de Armando Nunes Antão com o critério de Mário Vicente da Silva..... | 33 |
| Figura 3.1 – Interface de dois elementos 2D formado por elementos degenerados [1]..... | 37 |
| Figura 3.2 – Fronteira com descontinuidades entre dois elementos adjacentes [1]..... | 38 |
| Figura 3.3 – Graus de liberdade de um corpo rígido [1] | 39 |
| Figura 3.4 – Implementação do algoritmo de minimização de Uzawa [1] | 41 |
| Figura 3.5 – Zonas que definem o espaço auxiliar, C_c , no critério de Armando Nunes Antão | 46 |
| Figura 3.6 – Zonas que definem o espaço auxiliar, C_c , no critério de Mário Vicente da Silva | 48 |
| Figura 4.1 – Exemplo de validação nº1: Corpo sujeito a cargas uniformemente distribuídas normais à superfície (H e V) | 51 |
| Figura 4.2 – Exemplo de validação nº2: Corpo sujeito a cargas normais (H e V) e tangenciais (C) uniformemente distribuídas | 52 |

| | |
|---|----|
| Figura 4.3 – Exemplo de validação nº3: Provete de dois tijolos com junta sujeito a cargas aplicadas no tijolo superior (V e C) | 52 |
| Figura 4.4 – Discretização do corpo | 53 |
| Figura 4.5 – Resultado obtido pelo SUBLIM3d | 54 |
| Figura 4.6 – Resultados complementares obtidos pelo SUBLIM3d | 54 |
| Figura 4.7 – Representação do exemplo no diagrama de Mohr | 55 |
| Figura 4.8 – Representação gráfica do critério de cedência do exemplo | 57 |
| Figura 4.9 – Discretização do corpo | 58 |
| Figura 4.10 – Resultado obtido pelo SUBLIM3d | 58 |
| Figura 4.11 – Resultados complementares obtidos pelo SUBLIM3d | 59 |
| Figura 4.12 – Representação do exemplo no diagrama de Mohr | 60 |
| Figura 4.13 – Representação gráfica do critério de cedência do exemplo | 61 |
| Figura 5.1 – Tipo de elementos que definem os tijolos, as juntas e o lintel do modelo de uma parede de alvenaria | 64 |
| Figura 5.2 – Ficheiro de leitura do programa gerador de malhas | 65 |
| Figura 5.3 – Etapas que definem o ficheiro de comandos que permite a geração de malhas | 66 |
| Figura 5.4 – Dados necessários pela 1ª etapa do processo de criação de malhas..... | 66 |
| Figura 5.5 – Estrutura da alvenaria do exemplo 1 [12] | 68 |
| Figura 5.6 – Tipo de carregamento do exemplo 1 (adaptado de [12]) | 69 |
| Figura 5.7 – Domínio de estabilidade do exemplo 1 no plano de carregamento (γ_1, γ_2) [12]..... | 69 |
| Figura 5.8 – Proposta apresenta no artigo (adaptado de [12]) | 70 |
| Figura 5.9 – Representação gráfica dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d, pela proposta [12] e pelos resultados experimentais, para o caso de $\rho=1$ e $m=0.875$ | 73 |
| Figura 5.10 – Representação gráfica da tendência do multiplicador de colapso..... | 74 |
| Figura 5.11 – Determinação do número de processadores mais eficiente para o exemplo 1..... | 75 |
| Figura 5.12 – Comparação dos multiplicadores de cedência obtidos pelo SUBLIM3d com os obtidos por [12] e pelos ensaios experimentais, para o caso de $m=0.4375$ | 75 |
| Figura 5.13 – Comparação dos multiplicadores de cedência obtidos pelo SUBLIM3d com os obtidos por [12] e pelos ensaios experimentais, para o caso de $m=0.875$ | 76 |
| Figura 5.14 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d, para o caso de $m=0.4375$ nos pontos $\rho=0.25$ e 2.8 do exemplo 1 | 77 |
| Figura 5.15 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d, para o caso de $m=0.875$ nos pontos $\rho=0.25$ e 2.8 do exemplo 1 | 78 |
| Figura 5.16 – Geometria da alvenaria de pedra e esquema de carregamento (adaptado de [27]) | 81 |
| Figura 5.17 – Mecanismos de rotura experimental [27] | 82 |
| Figura 5.18 – Modos de rotura obtidos para parede SW200 pela: a) Análise limite 1 b) Análise limite 2 [17] | 83 |
| Figura 5.19 – Modo de rotura obtido para a parede SW30 pela Análise MEF [31] | 84 |
| Figura 5.20 – Modelo proposto pelo método simplificado de análise descrevendo o equilíbrio na cedência [30] | 84 |
| Figura 5.21 – Superfície de cedência hiperbólica | 85 |
| Figura 5.22 – Parâmetros do critério de cedência de Mohr - Coulomb | 86 |
| Figura 5.23 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas com as curvas de carregamento -deslocamento experimentais da parede de corte SW30 | 88 |
| Figura 5.24 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas com as curvas de carregamento - deslocamento experimentais da parede SW100..... | 89 |

| | |
|--|-----|
| Figura 5.25 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas com as curvas de carregamento – deslocamento experimentais da parede de corte SW200 | 89 |
| Figura 5.26 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas com a curva de carregamento – deslocamento experimental da parede de corte SW250..... | 90 |
| Figura 5.27 – Dissipação plástica e malha deformada obtida pelo SUBLIM3d para a parede de corte SW30 do exemplo2 | 91 |
| Figura 5.28 – Dissipação plástica e malha deformada obtida pelo SUBLIM3d para a parede de corte SW100 do exemplo2 | 92 |
| Figura 5.29 – Dissipação plástica e malha deformada obtida pelo SUBLIM3d para a parede de corte SW200 do exemplo2 | 92 |
| Figura 5.30 – Dissipação plástica e malha deformada obtida pelo SUBLIM3d para a parede de corte SW250 do exemplo2 | 93 |
| Figura 5.31 – Estrutura da alvenaria do exemplo 3 (adaptado de [10]) | 96 |
| Figura 5.32 – Critério de cedência dos elementos de junta (adaptado de [10]) | 97 |
| Figura 5.33 – Critério de cedência da junta para o caso de tracção uniaxial (adaptado de [10])..... | 98 |
| Figura 5.34 – Mecanismos de rotura experimentais típicos para os ensaios de compressão biaxial: Compressão (a) uniaxial; (b) biaxial (adaptado de [36]) | 99 |
| Figura 5.35 – Resumo dos modos de rotura para a tracção-compressão biaxial (adaptado de [37]) | 100 |
| Figura 5.36 – Estado de tensão aplicado à alvenaria (círculo de Mohr) | 102 |
| Figura 5.37 – Carregamento equivalente aplicado na estrutura da alvenaria com $\theta=90^\circ$ | 103 |
| Figura 5.38 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas (SUBLIM3d e [10]) para o painel com $\theta=90^\circ$ no ensaio de tracção biaxial..... | 105 |
| Figura 5.39 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas (SUBLIM3d e [10]) para o painel com $\theta=67.5^\circ$ no ensaio de tracção biaxial | 105 |
| Figura 5.40 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas (SUBLIM3d e [10]) para o painel com $\theta=45^\circ$ no ensaio de tracção biaxial..... | 106 |
| Figura 5.41 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas (SUBLIM3d e [10]) para o painel com $\theta=22.5^\circ$ no ensaio de tracção biaxial | 106 |
| Figura 5.42 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas (SUBLIM3d e [10]) para o painel com $\theta=0^\circ$ no ensaio de tracção biaxial..... | 107 |
| Figura 5.43 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [36] para o painel com $\theta=90^\circ$ no ensaio de compressão biaxial | 108 |
| Figura 5.44 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [36] para o painel com $\theta=67.5^\circ$ no ensaio de compressão biaxial | 108 |
| Figura 5.45 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [36] para o painel com $\theta=45^\circ$ no ensaio de compressão biaxial | 109 |
| Figura 5.46 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [36] para o painel com $\theta=22.5^\circ$ no ensaio de compressão biaxial | 109 |
| Figura 5.47 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [36] para o painel com $\theta=0^\circ$ no ensaio de compressão biaxial | 110 |
| Figura 5.48 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [37] para o painel com $\theta=90^\circ$ no ensaio de tracção – compressão biaxial..... | 111 |
| Figura 5.49 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [37] para o painel com $\theta=67.5^\circ$ no ensaio de tracção – compressão biaxial..... | 111 |
| Figura 5.50 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [37] para o painel com $\theta=45^\circ$ no ensaio de tracção – compressão biaxial..... | 112 |

| | |
|---|-----|
| Figura 5.51 – Comparação dos resultados obtidos pelos SUBLIM3d com os experimentais [37] para o painel com $\theta=22.5^\circ$ no ensaio de tracção – compressão biaxial | 112 |
| Figura 5.52 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [37] para o painel com $\theta=0^\circ$ no ensaio de tracção - compressão biaxial..... | 113 |
| Figura 5.53 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3, referente ao ensaio de tracção biaxial – Parte I..... | 114 |
| Figura 5.54 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3, referente ao ensaio de tracção biaxial – Parte II..... | 114 |
| Figura 5.55 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3, referente ao ensaio de tracção biaxial – Parte III..... | 115 |
| Figura 5.56 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=0^\circ$ e $\sigma_2=0$, referente ao ensaio de compressão biaxial | 115 |
| Figura 5.57 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=22.5^\circ$ e $\sigma_2=0$, referente ao ensaio de compressão biaxial | 116 |
| Figura 5.58 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=90^\circ$ e $\sigma_2=0$, referente ao ensaio de compressão biaxial | 116 |
| Figura 5.59 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=0^\circ$, referente ao ensaio de tracção – compressão biaxial..... | 117 |
| Figura 5.60 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=22.5^\circ$, referente ao ensaio de tracção – compressão biaxial..... | 117 |
| Figura 5.61 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=45^\circ$, referente ao ensaio de tracção – compressão biaxial..... | 117 |
| Figura 5.62 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=67.5^\circ$, referente ao ensaio de tracção – compressão biaxial..... | 118 |
| Figura 5.63 – Dissipação plástica e malha deformada obtidos pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=90^\circ$, referente ao ensaio de tracção - compressão biaxial..... | 118 |
| Figura 5.64 – Ensaio de compressão sob provetes de alvenaria e suas consequências | 122 |

Índice de Tabelas

| | |
|--|-----|
| Tabela 2.1 – Função da taxa de dissipação da energia plástica para o critério de Mohr - Coulomb.... | 29 |
| Tabela 2.2 – Função da taxa de dissipação da energia plástica para o critério [4] | 30 |
| Tabela 2.3 – Função da taxa de dissipação da energia plástica para o critério [5] | 32 |
| Tabela 4.1 – Principais características da malha | 54 |
| Tabela 4.2 – Tensões aplicadas no corpo e propriedades do círculo de Mohr | 55 |
| Tabela 4.3 – Principais características da malha | 58 |
| Tabela 4.4 – Tensões principais aplicadas no corpo e propriedade do círculo de Mohr | 59 |
| Tabela 5.1 – Multiplicador de colapso para as várias proporções da alvenaria dos cálculos efectuados | 73 |
| Tabela 5.2 – Erro obtido ao considerar cada multiplicador de colapso | 74 |
| Tabela 5.3 – Principais características da malha do exemplo 1 para os casos de $m=0.4375$ e 0.875 nos pontos $\rho=0.25$ e 2.8 | 76 |
| Tabela 5.4 – Multiplicadores de cedência obtidos pelo SUBLIM3d para os casos de $m=0.4375$ e 0.875 nos pontos $\rho=0.25$ e 2.8 do exemplo 1 | 76 |
| Tabela 5.5 – Carregamento vertical aplicado a cada parede modelo do exemplo 2 | 81 |
| Tabela 5.6 – Comparação da carga de colapso[KN] obtida experimentalmente com a obtida pelas estimativas teóricas | 90 |
| Tabela 5.7 – Principais características da malha de cada parede do exemplo 2 | 91 |
| Tabela 5.8 – Principais características das malhas utilizados no exemplo 3 | 114 |

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A motivação para realizar a presente dissertação pode ser enquadrada em duas vertentes distintas: a pessoal e a científica.

As razões pessoais pelas quais aceitei a proposta de realizar a presente dissertação foram:

- O interesse e a vontade em continuar a contribuir para o desenvolvimento do SUBLIM3d, nomeadamente no tema cargas de colapso de sistemas de alvenaria;
- A transversalidade do tema, da determinação das cargas de colapso, em relação a diferentes áreas da Engenharia Civil (por exemplo: Estruturas, Geotecnia e Construção);
- O gosto e interesse pela programação associada à utilização de métodos de elementos finitos.

No que concerne à vertente científica, o tema apresenta ainda alguns pontos por esclarecer, apresentando assim a possibilidade de conduzir a trabalho inovador e aliciante. Destacam-se, nomeadamente:

- A dificuldade em simular numericamente a alvenaria, devido a este tipo de estrutura ser um material complexo (composto por unidades, juntas e interfaces unidade/junta) que exhibe diferentes propriedades direccionais (resistência e rigidez). Estas propriedades são influenciadas principalmente pelas propriedades dos materiais (unidades e juntas), pela resistência dos interfaces unidade/junta (que assume normalmente um valor muito inferior quando comparado com as unidades e as juntas, assim a presença destes interfaces cria planos de fragilidade ao longo do qual a falha pode iniciar-se e propagar-se) e da sua orientação e pelo modo de execução da alvenaria;
- O insucesso dos métodos existentes para estimar a carga de colapso dos sistemas de alvenaria, revelando que se trata de uma área de investigação não concluída, havendo ainda possibilidade para explorar soluções alternativas que permitam ultrapassar as limitações observadas actualmente. Em particular, a utilização dos teoremas da análise limite permitem obter métodos com elevadas potencialidades, mas que têm sido até agora razoavelmente negligenciados;
- A consideração da resistência à compressão da alvenaria na direcção normal à junta horizontal como sendo a única propriedade relevante do material, conduzindo a um estado de compressão triaxial na junta e a um estado de compressão biaxial na unidade. Por isso as estruturas de alvenaria ainda nos dias de hoje, apenas são usadas em compressão, a menos que se use alvenarias reforçadas ou pré-esforçadas;
- O desprezo da capacidade resistente das paredes não estruturais no cálculo estrutural;
- A inexistência de novas aplicações da alvenaria estrutural, que se deve:
 - Às razões económicas - Em países desenvolvidos, a alvenaria parece ter perdido quase completamente a sua função estrutural, para serem usados como um sistema de revestimento ou para preencher paredes não resistentes. Em países em desenvolvimento e países do terceiro mundo a situação é bastante diferente, com a alvenaria estrutural ainda a ser largamente usada;

- À falta de desenvolvimento das regras de dimensionamento deste tipo de estrutura em relação às regras do betão e do aço - A falta de desenvolvimento das regras de dimensionamento da alvenaria conduz a uma necessidade de novas pesquisas que é confirmada pelo facto que códigos modernos, CEN [2] e ACI [3] se recusarem a aceitar qualquer teoria simplificativa;
- À educação dos engenheiros Civis;
- À falta de conhecimento do comportamento deste tipo de estrutura.

Apresentam-se agora as aplicações da alvenaria estrutural existentes que ainda nos dias de hoje são competitivas: as paredes resistentes, os painéis de enchimento para resistir a cargas sísmicas e do vento, os núcleos de alvenaria pré-esforçada e os edifícios de pequena altura.

1.2 Objectivo

De forma sucinta o objectivo deste trabalho encontra-se na descrição do tema: “O trabalho proposto visa o desenvolvimento de uma ferramenta numérica de elementos finitos existente no DEC, SUBLIM3d, com vista à sua aplicação na determinação de cargas de colapso de sistemas de alvenaria”. Assim, neste trabalho pretende-se contribuir para a resolução do problema da determinação das cargas de colapso de sistemas de alvenaria.

Para se compreender melhor o objectivo apresentado serão feitos alguns esclarecimentos:

- A ferramenta numérica SUBLIM3d é fundamentada no teorema cinemático da análise limite, que visa o cálculo de limites superiores precisos de cargas de colapso de estruturas;
- O SUBLIM3d já permitia o cálculo de limites superiores para sistemas de alvenaria, mas o que se pretende com este trabalho é desenvolver funções de dissipação mais eficientes (os modelos propostos apresentam uma maior aplicabilidade do que os sistemas de alvenaria, podendo resolver também problemas nas áreas: dos adesivos, das juntas em materiais rochosos, dos contactos entre corpos, isto é, todo o tipo de comportamento de interface onde a ligação, a coesão e o atrito entre os constituintes formem acções mecânicas básicas);
- Os sistemas de alvenaria em que se foca este estudo são as paredes de alvenaria não reforçada que são um meio não homogéneo (apresenta diferentes propriedades conforme a direcção considerada) e anisotrópico (apresenta diferentes características mecânicas conforme a direcção considerada);
- O estudo ficou-se pelos casos bidimensionais, logo apenas se considerou o comportamento das paredes no plano, sujeitando-as a cargas estáticas de pequena duração.

Para se alcançar o objectivo global, é necessário atingir os seguintes sub-objectivos que o constituem:

- Desenvolvimento da ferramenta numérica, através da introdução de duas novas superfícies de cedência propostas pelos professores Armando Nunes Antão[4] e Mário Vicente da Silva[5] que tentaram incorporar os diferentes mecanismos de rotura, nomeadamente, rotura por tracção, por corte e por compressão. A superfície de cedência proposta pelo professor Armando Nunes Antão é baseada na superfície de cedência considerada por Lourenço[6], em que a recta vertical apresentada na truncatura em tracção é substituída por um círculo. Por outro lado, a superfície de cedência proposta pelo professor Mário Vicente da Silva é também uma superfície de cedência composta, mas neste caso é constituída pelo critério de Mohr-Coulomb e por uma truncatura horizontal na zona de compressão. Através da utilização destes dois critérios pretende-se obter melhores resultados do que os apresentados na literatura, porque os critérios existentes não consideram na sua maioria truncatura em compressão e em tracção, e os que consideram apresentam uma forma que não é mecanicamente possível;
- Implementar numericamente as duas funções na ferramenta numérica SUBLIM3d, permitindo assim o cálculo da dissipação de energia das alvenarias;
- Validar a correcta programação dos critérios, através de exemplos simples em que a carga de colapso real seja de fácil determinação;
- Uma vez dispondo da ferramenta de cálculo totalmente operacional, torna-se imprescindível proceder à análise de um número variado de exemplos numéricos, que permitem avaliar a robustez (garantir a convergência para a maioria das situações), precisão (apresentar o menor desvio possível à solução real), eficiência (apresentar um tempo de cálculo reduzido), desempenho (obter pelo menos tão bons resultados quanto os existentes na literatura) e capacidade dos modelos propostos. Os resultados previstos pelos modelos são comparados com os resultados obtidos numericamente por outros autores e com os resultados experimentais.

1.3 Metodologia

Neste subcapítulo apresentam-se os métodos existentes para as ferramentas de cálculo e para as suas características: modelação da alvenaria, comportamento do material, resolução do problema da simulação numérica da alvenaria e superfície de cedência.

No que refere às estratégias de modelação da alvenaria, são conhecidos a modelação micro detalhada, onde as unidades e as juntas são representadas por elementos contínuos e onde os interfaces unidade/junta são representados por elementos descontínuos, a modelação micro simplificada, onde as unidades são expandidas, mas continuam a ser representadas por elementos contínuos, enquanto que o comportamento das juntas e dos interfaces é substituído por uma única superfície que é constituída por elementos de junta e a modelação macro ou homogeneização ou modelação contínua (para se obter esta modelação existem dois processos: a homogeneização xy ou a homogeneização yx, que conduzem à obtenção de diferentes resultados), em que o conjunto das unidades, das juntas e dos interfaces é substituído por um compósito [6].

Os materiais podem exibir um comportamento elástico, em que após a remoção das forças externas o corpo volta à forma original, ou inelástico, em que o corpo ao ser submetido a acções externas, deforma-se e não retorna mais ao estágio inicial e ou elasto-plástico, em que numa primeira fase, até atingir a cedência, exibe comportamento elástico, e depois exibe um comportamento plástico até atingir a rotura.

Os métodos de resolução do problema da simulação numérica da alvenaria podem ser divididos em análises lineares e não lineares. Neste trabalho evidencia-se a utilização de métodos não lineares, tais como:

- O método da análise limite, que é baseado nos teoremas fundamentais (teorema estático, cinemático e da unicidade) e utiliza técnicas de optimização para a sua implementação;
- A análise elasto-plástica incremental, que apresenta um problema de acumulação de erro e exige um custo computacional significativo;
- O método de elementos discretos ou método de elementos distintos (MED) proposto por P. A. Cundall [7], que exige um elevado esforço computacional.

Por último, as superfícies de cedência existentes com relevância nesta área são, o critério de cedência de Drucker - Prager proposto por D. C. Drucker et al.[8], o critério de cedência de Rankine, o critério de cedência de Mohr-Coulomb, o modelo de truncatura do interface [6] constituído por uma superfície de cedência composta por três ramos: uma truncatura esférica em compressão, um critério de Mohr-Coulomb e um ramo vertical para a truncatura em tracção, a superfície de cedência proposta por W. F. Chen e D. C. Drucker [9] corresponde a um critério de cedência modificado de Mohr-Coulomb com uma pequena truncatura em tracção, a superfície de cedência proposta por A. W. Page [10] que corresponde a uma superfície de cedência composta por dois ramos inclinados e a superfície de cedência hiperbólica proposta por H. R. Lotfi e P. B. Shing [11]. As novas superfícies de cedência propostas nesta dissertação são a superfície de cedência proposta por Armando Nunes Antão[4] e a superfície de cedência proposta por Mário Vicente da Silva[5], em que ambas são critérios de cedência compostos e apresentam como base a superfície de cedência de Mohr-Coulomb.

As ferramentas de cálculo mais actuais descritas na literatura para a análise de estruturas de alvenaria são:

- A proposta apresentada por P. DeBuhan e G. DeFelice [12], que considera o teorema cinemático do método de análise limite para a resolução do problema da simulação numérica da alvenaria, modelando a alvenaria como um material homogéneo, onde as unidades são tomadas como rígidas e usa a superfície de cedência de Mohr-Coulomb para modelar as juntas. Esta proposta permite obter informações importantes na rotura (como os multiplicadores limite, os mecanismos de colapso e a distribuição de tensões nas secções críticas) e é mais eficiente na análise de alvenarias de grande escala [13];
- A proposta apresentada por A. W. Page (análise de elementos finitos não lineares) [14], que executa a resolução do problema da simulação numérica da alvenaria através de uma análise incremental no qual as unidades apresentam um comportamento elástico enquanto que as juntas e os interfaces apresentam um comportamento plástico;

- A proposta apresentada por D. J. Sutcliffe et al. [15], que considera a superfície de cedência de Mohr-Coulomb para as unidades e o modelo de truncatura do interface para as juntas e para os interfaces unidade/junta, sendo que a resolução do problema da simulação numérica da alvenaria é baseada no teorema estático do método de análise limite;
- A proposta apresentada por G. Milani et al. [16], que considera como estratégia de modelação a homogeneização onde o comportamento do corpo é admitido como rígido plástico e o método de resolução do problema da simulação numérica da alvenaria foi a análise limite tanto recorrendo ao teorema cinemático como ao teorema estático;
- A proposta apresentada por A. Orduna e P. B. Lourenço [17], que considera como método de resolução do problema da simulação numérica da alvenaria a análise limite e opta por considerar as unidades como rígidas e as juntas como plásticas sendo que para os interfaces unidade/junta o critério de cedência escolhido foi o de Mohr-Coulomb;
- A proposta apresentada por A. Zucchini e P. B. Lourenço [18], que escolhe a homogeneização como a estratégia de modelação, executa a resolução do problema da simulação numérica da alvenaria através de uma análise não linear, considerando o material como elástico e os modelos de cedências adoptados foram o de Rankine em tracção e o de Drucker - Prager em compressão;
- A proposta apresentada por P. B. Lourenço [6], que considera a modelação micro simplificada e a homogeneização (com diferentes propriedades direccionais) como as estratégias de modelação da alvenaria, propõe uma superfície de cedência para os interfaces e considera que os materiais apresentam um comportamento plástico;

A ferramenta de cálculo considerada no presente trabalho é o SUBLIM3d [1] que considera a modelação micro simplificada para a modelação da alvenaria, que opta por considerar os materiais como rígido-plásticos, que se baseia no teorema cinemático do método da análise limite para a resolução do problema da simulação numérica da alvenaria e que considera as seguintes superfícies de cedência: Mohr-Coulomb, a proposta apresentada por Armando Nunes Antão e a proposta apresentada por Mário Vicente da Silva.

1.4 Organização do documento

O presente documento encontra-se estruturado em 6 capítulos. Após este capítulo introdutório, onde foram apresentados a motivação, o objectivo e a metodologia adoptada no trabalho, seguem-se os capítulos centrais da dissertação, cujo conteúdo é sumariado em seguida:

Capítulo 2. Neste capítulo apresenta-se uma definição rigorosa do problema em análise. Para tal, em primeiro lugar procede-se à caracterização da alvenaria (estratégias de modelação da alvenaria), em seguida são revistos alguns conceitos sobre o comportamento do material e por último, segue-se uma revisão bibliográfica, na qual se pretende enquadrar o leitor sobre o estado da arte dos métodos de resolução do problema da simulação numérica da alvenaria (sendo apenas referidos os trabalhos mais relevantes no contexto deste tema, destacando-se os aspectos principais de cada abordagem).

Capítulo 3. O capítulo apresenta resumidamente a ferramenta de cálculo usada no presente estudo (SUBLIM3d), incluindo a formulação numérica adoptada, o algoritmo de programação matemático escolhido e o modo de incorporar corpos rígidos e elementos de junta na ferramenta de cálculo. Expõe-se também neste capítulo, a implementação numérica das duas superfícies de cedência propostas.

Capítulo 4. Com o intuito de validar os modelos propostos, apresentam-se neste capítulo dois exemplos numéricos simples em que a determinação da carga de colapso é fácil.

Capítulo 5. Com o intuito de aferir a capacidade das formulações propostas, apresentam-se neste capítulo três exemplos numéricos (dois exemplos numéricos, em que se considera a superfície de cedência de Mohr-Coulomb, porque a influência da truncatura não é relevante e um exemplo numérico em que se considera os dois critérios de cedência propostos, devido à influência da truncatura no resultado) em que as soluções obtidas são comparadas com resultados experimentais e teóricos disponíveis na literatura. Inclui-se também neste tópico, a estruturação dos dois malhadores criados para gerar o ficheiro de dados necessário pelo SUBLIM3d.

Capítulo 6. O capítulo apresenta por fim as principais conclusões retiradas deste trabalho, juntamente com algumas sugestões de desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Definição do Problema

2.1 Considerações iniciais

A convenção de sinais geralmente adoptada ao longo deste documento, tanto para as tensões como para as deformações, será a da geomecânica. Esta convenção considera que a compressão é positiva e que os esforços de corte (tangenciais) são positivos quando provocam a rotação do elemento no sentido horário (para ver as implicações desta convenção consultar [19]). Considerou-se por outro lado a convenção de sinais da mecânica dos sólidos no capítulo 3, devido a se tratar da convenção utilizada na formulação do SUBLIM3d.

O presente trabalho focou-se na análise do problema em duas dimensões (2D), por isso as informações contidas em todos os capítulos restringem-se quase na totalidade ao caso bidimensional.

2.2 Caracterização dos Sistemas de alvenaria

Os principais sistemas de alvenaria existentes são: Alvenaria simples (ou não reforçada), Alvenaria armada (ou reforçada), Alvenaria pré-esforçada e Alvenaria confinada (ver Figura 2.1). Nos países desenvolvidos, os sistemas de alvenaria perderam quase totalmente a sua função estrutural, porque o betão reforçado e as estruturas de aço tornaram-se mais competitivas, sendo a resistência o principal factor de concorrência. Assim, nos dias de hoje, o sistema de alvenaria mais usado é o da alvenaria simples aplicada tanto aos sistemas de revestimento, como ao preenchimento de paredes não resistentes. Excepções são os painéis de enchimento para resistir às cargas sísmicas e do vento, os núcleos de alvenaria pré-esforçada e a alvenaria estrutural usada em edifícios de reduzida altura.

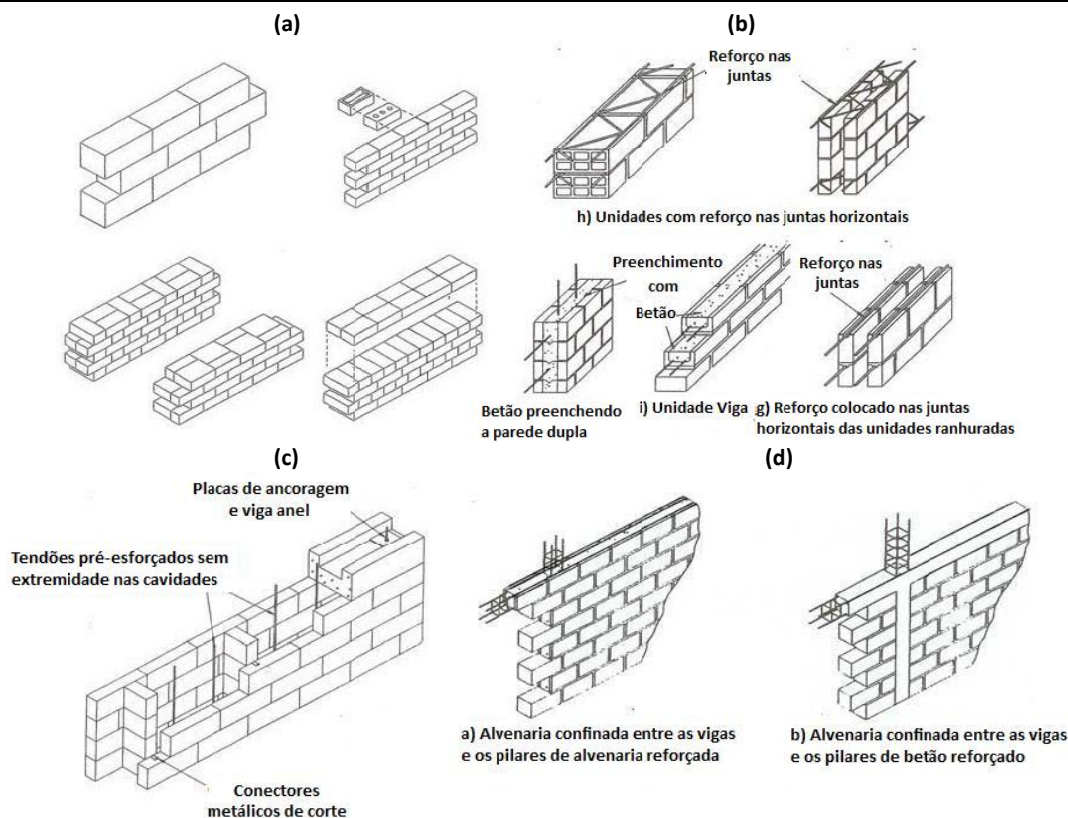


FIGURA 2.1 – Sistemas de alvenaria: Exemplos de alvenaria (a) Simples (b) Armada (c) Pré-esforçada (d) Confinada (adaptada de [20])

A alvenaria simples corresponde a uma sobreposição de unidades ligadas ou não por juntas, existindo sempre um interface entre estes compostos, assim os materiais que constituem a alvenaria são: as unidades, as juntas e os interfaces. No caso das unidades correntemente chamadas de tijolos ou blocos, estas podem ser classificadas em relação à sua forma (de unidades regulares ou de unidades irregulares), em relação às características geométricas da respectiva furação (de unidades com furação horizontal, de unidades com furação vertical ou de unidades maciças onde se inclui as unidades com reduzida furação, ver Figura 2.2) e em relação aos seus constituintes (betão de agregados correntes, betão de agregados leves, betão celular autoclavado, adobe, vidro, pedra natural, pedra artificial, argamassa, argila, silicato de cálcio, produtos cerâmicos e etc.). Por seu lado, as juntas podem ser classificadas em relação aos seus constituintes: argamassa (argamassa corrente, argamassa-cola e argamassa leve), argila, betume, cal, relação volumétrica cimento/cal/areia, cola e etc. Por último, neste tipo de alvenaria os interfaces podem ser de dois tipos, unidade/junta ou unidade/unidade, consoante as unidades sejam ou não ligadas por juntas, mas actuam sempre como plano de fraqueza na alvenaria, devido à muito menor resistência que apresentam em relação aos outros compostos. É ao longo destes planos que se podem iniciar e propagar as falhas, conduzindo à rotura da alvenaria.

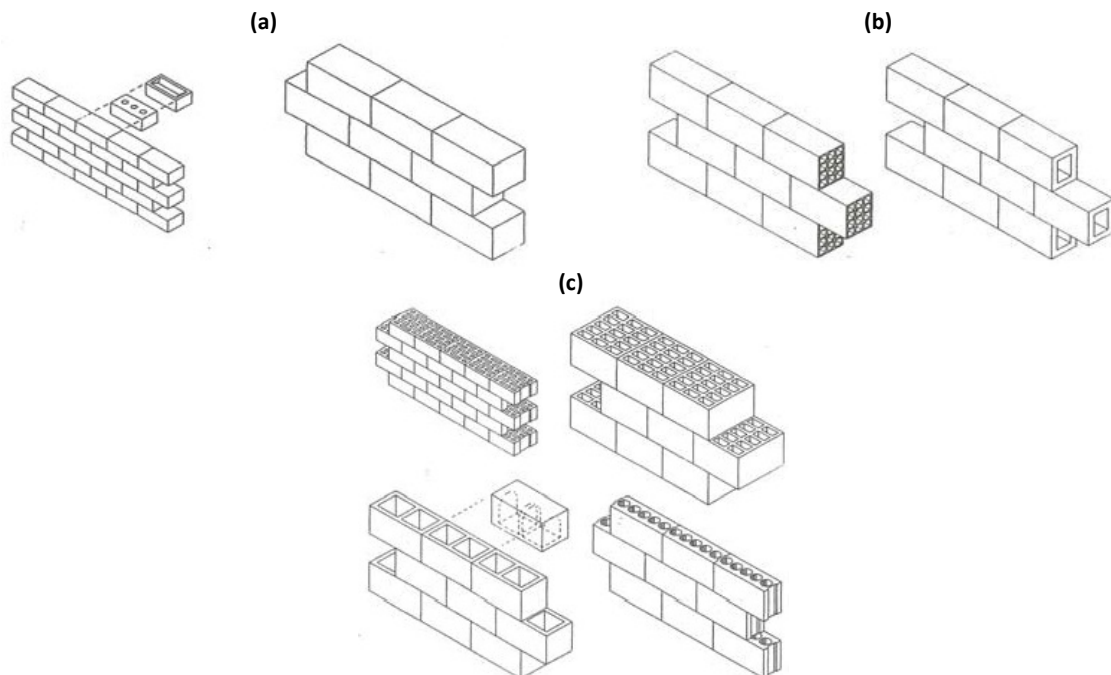


FIGURA 2.2 – Classificação das unidades em relação às características geométricas da respectiva furação: Unidades (a) Maciças; (b) com Furação Horizontal; (c) com Furação Vertical [20]

As características globais deste material composto são:

- A simplicidade de execução;
- A estética;
- A solidez;
- A durabilidade;
- A necessidade de pouca manutenção;
- A versatilidade;
- A absorção de som;
- A protecção ao fogo;
- O isolamento térmico;
- A exibição de comportamento heterogéneo e anisotrópico (devido aos interfaces que funcionam como potenciais superfícies de rotura);
- A reduzida resistência à tracção;
- A boa resistência à compressão na direcção normal às juntas horizontais (característica mais relevante), que conduz a um estado de compressão triaxial nas juntas e a um estado de compressão biaxial na unidades.

Os principais factores que influenciam estas características são:

- As características das unidades: Tipo de furação, constituintes, geometria, dimensões e sua relação, e grau de cozedura;
- As características das juntas: Anisotropia, heterogeneidade, porosidade, constituintes, largura, espessura e grau de cura;
- As características dos interfaces: Relação entre as características das unidades e das juntas;
- A relação entre as dimensões das unidades e da alvenaria;
- A existência ou não de preenchimento da junta entre as unidades;
- As diferentes inclinações e orientações das juntas/interfaces;

- Os tipos de disposição da alvenaria, que dependem do tipo de alvenaria: Alvenaria de pedra (ver Figura 2.3) e alvenaria de tijolos/blocos (ver Figura 2.4);

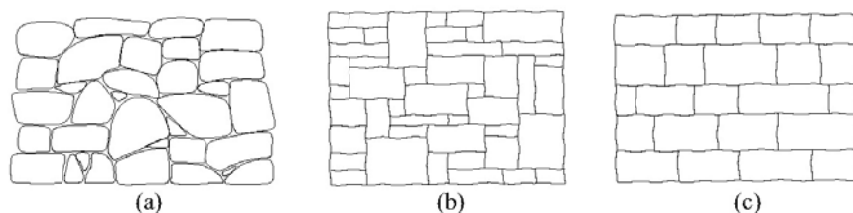


FIGURA 2.3 – Tipos de alvenaria de pedra: Alvenaria de (a) Cascalho; (b) Blocos sem alinhamento; (c) Blocos com alinhamento [21]

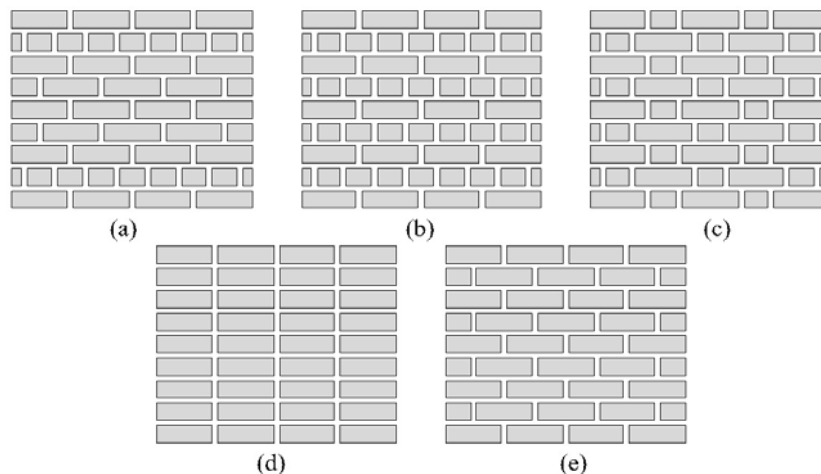


FIGURA 2.4 – Tipos de disposição da alvenaria de tijolos/blocos: Ligação (a) Americana; (b) Inglesa (ou cruzada); (c) Flamengo; (d) Tipo monte; (e) Alternada (ou comum) [21]

- Os tipos de secção transversal da alvenaria tradicional (no caso tridimensional), que dependem da espessura da parede, isto é, quando a espessura da parede é reduzida as unidades estendem-se em toda a espessura, pelo contrário, se a parede apresentar uma grande espessura, as unidades podem ser usadas apenas para as camadas exteriores sendo o interior preenchido com pedras irregulares, ou com cascalho ou com mais camadas de alvenaria (ver Figura 2.5).

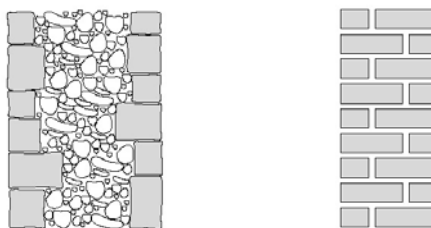


FIGURA 2.5 – Tipos de secção transversal da alvenaria [21]

- A qualidade do trabalho e o modo de execução da alvenaria;
- O ambiente em que a alvenaria se encontra inserida;
- A idade da Alvenaria.

Devido às características das alvenarias não reforçadas e aos inúmeros factores que as afectam, torna-se difícil tanto a simulação do comportamento da alvenaria, bem como a modelação numérica da alvenaria. Sendo a maior exigência, definir o correcto comportamento da alvenaria, através das propriedades individuais dos compostos.

Dependendo do nível de precisão, do campo de aplicação e da simplicidade desejada é possível usar as seguintes estratégias de modelação, ver Figura 2.6:

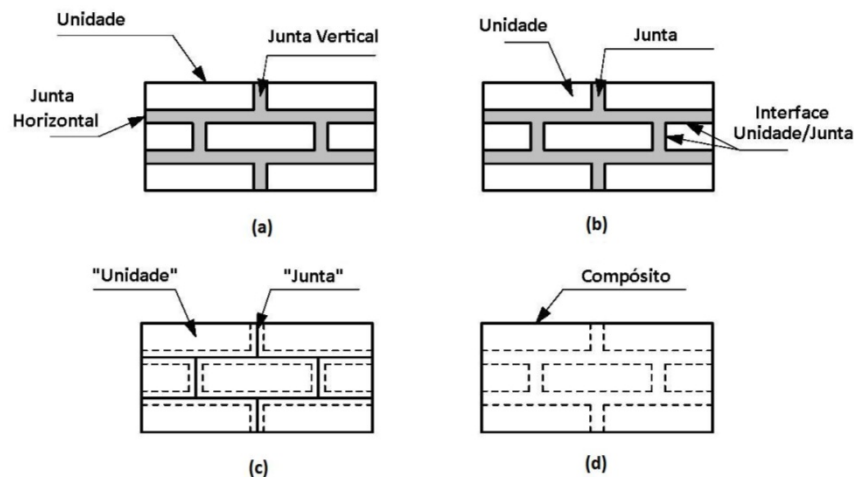


FIGURA 2.6 – Estratégias de modelação para alvenarias simples: (a) Amostra de alvenaria; (b) Modelação micro detalhada; (c) Modelação micro simplificada; (d) Modelação macro (adaptada de [6])

- Modelação micro detalhada, onde as unidades e as juntas são representadas por elementos contínuos, enquanto que os interfaces unidade/junta são representados por elementos descontínuos e, por isso, corresponde à modelação existente mais detalhada. O objectivo de representar detalhadamente a alvenaria é alcançado através de testes laboratoriais nos materiais e em pequenas amostras de alvenaria, que permitem obter as propriedades de cada composto. Esta modelação necessita tanto para as unidades como para as juntas, das seguintes propriedades: Módulo de Young, Coeficiente de Poisson e opcionalmente propriedades inelásticas. Por outro lado, os interfaces representam um potencial plano de deslizamento/rotura. Esta aproximação é mais eficiente para alvenarias de pequena dimensão, para detalhes de estruturas de alvenaria, para regiões onde haja aberturas de janelas ou de portas, isto é, para zonas onde exista uma forte heterogeneidade de tensões e de deformações;
- Modelação micro simplificada, onde o comportamento das juntas e dos interfaces unidade/junta são colocados em superfícies médias (cada superfície média é constituída por uma junta e por dois interfaces unidade/junta) com espessuras nulas, sendo estas superfícies constituídas por elementos de junta, devido a corresponderem a potenciais linhas de fractura/deslizamento. Por outro lado, as unidades são expandidas (para manter a geometria global inalterada), mas continuam a ser representadas por elementos contínuos. Este tipo de modelação apresenta o mesmo campo de aplicação que a modelação micro detalhada;
- Modelação macro, ou homogeneização ou modelação contínua, onde as unidades, as juntas e os interfaces unidade/junta são substituídos por um compósito anisotrópico (sendo as relações estabelecidas em termos de tensões e deformações médias). Corresponde à modelação que apresenta maior rapidez de obtenção de resultados (devido em primeiro lugar, aos requisitos de memória serem reduzidos e segundo lugar, à fácil geração da malha). Esta modelação deve ser capaz de reproduzir um material ortotrópico, com diferentes

resistências à tracção e à compressão ao longo de cada eixo do material, bem como o seu comportamento inelástico. Não é surpreendente que esta aproximação tenha sido implementada em reduzido número, devido à complexidade intrínseca de introduzir o comportamento ortotrópico. Esta aproximação é mais eficiente para alvenarias de grandes dimensões e sem aberturas, isto é, para zonas onde exista um estado homogéneo de tensão e de deformação.

2.3 Comportamento do Material

Para a resolução do problema da determinação das cargas de colapso de sistemas de alvenaria é necessário definir o comportamento de cada composto da alvenaria simples.

2.3.1 Fundamentos da teoria da elasto-plasticidade

O comportamento de um corpo que respeita esta teoria é caracterizado por numa primeira fase, exibir comportamento elástico, até atingir a cedência. A partir da cedência inicia-se a segunda fase, onde o corpo exibe um comportamento plástico até atingir a sua rotura, ver Figura 2.7.

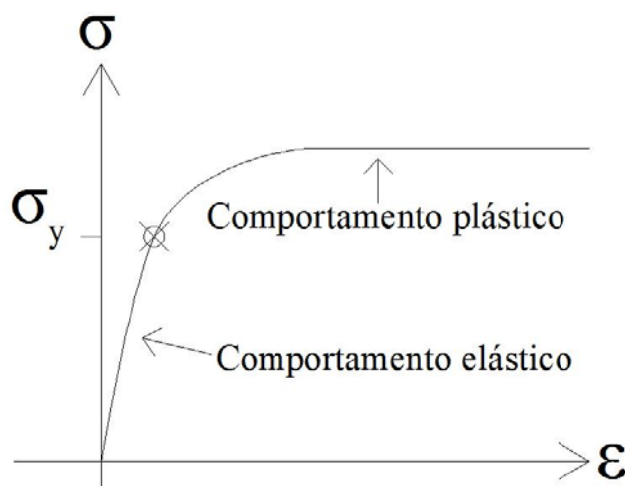


FIGURA 2.7 – Diagrama tensão-deformação típico em condições uniaxiais

2.3.1.1 Parcela elástica

A teoria da elasticidade corresponde à teoria que se aplica no ramo elástico de um diagrama de tensão-deformação (Figura 2.7). O comportamento elástico é caracterizado por não existirem deformações permanentes (estas deformações são chamadas de deformações elásticas, ϵ_e), isto é, a resposta deste comportamento é reversível, dado que num material elástico quando cessar a aplicação da tensão ocorre a recuperação total das deformações, voltando simplesmente ao estado de tensão/deformação inicial.

O trabalho produzido pela tensão na fase de carregamento deve ser sempre maior ou igual a zero, equação (2.1), onde o valor nulo apenas é assumido quando a tensão e a deformação forem iguais a zero. Basicamente a fórmula do trabalho, equação (2.1), representa a área debaixo da curva de tensão-deformação do material (Figura 2.7), embora seja ligeiramente mais complexo no caso de se considerar todas as componentes da tensão e da deformação. O trabalho produzido pela tensão

quando o corpo foi inicialmente carregado, vai ser totalmente recuperado na fase de descarregamento, porque o corpo durante esta fase liberta a mesma quantidade de energia mas com sentido oposto.

$$W_{elástico} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon_e d\Omega \geq 0 \quad (2.1)$$

Olhando agora para o que acontece no espaço das tensões principais, onde um ponto de tensão no regime elástico, $\{x\}$, é caracterizado por nunca tocar na superfície de cedência do material, como se mostra na Figura 2.8,

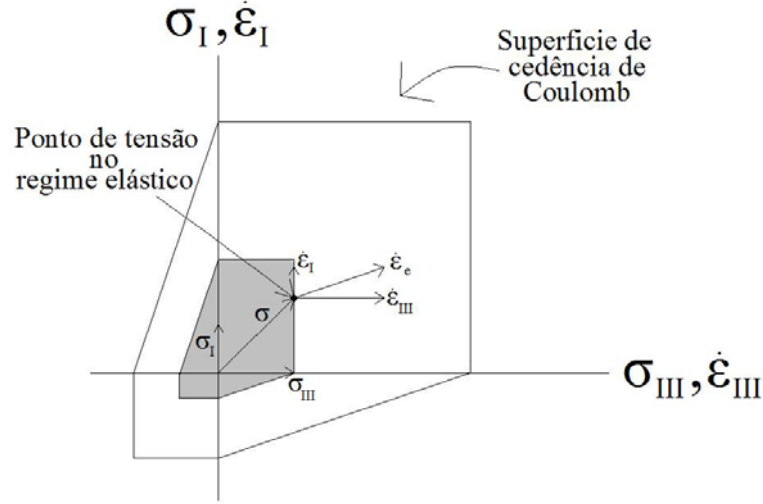


FIGURA 2.8 – Domínio elástico definido pela superfície de Coulomb – Hipótese de tensão plana

logo em termos numéricos esta restrição é traduzida pela equação (2.2),

$$f(\sigma) < 0 \text{ em } \{x\} \quad (2.2)$$

isto é, o valor do tensor de tensão, σ , deve cumprir no ponto de tensão com a restrição imposta à função que define o critério de cedência, f . Como se pode observar pela Figura 2.8, o tensor da taxa de deformação elástica, ε_e , pode apresentar qualquer orientação, não sendo necessário obedecer à regra da normalidade. Tendo como base a equação (2.1) e a informação contida na Figura 2.8 pode-se definir uma nova grandeza, a taxa do trabalho elástico, \dot{W}_e , que é definida pela seguinte fórmula,

$$\dot{W}_e = \int_{\Omega} \sigma^T \dot{\varepsilon}_e d\Omega \quad (2.3)$$

2.3.1.1.1 Definição/Solução do tipo de problema

Um corpo homogéneo, isotrópico e elástico linear ocupa um volume, Ω , com fronteira definida pela superfície Γ , que o envolve. A superfície Γ é constituída por duas partes complementares (Γ_u e Γ_σ), isto é, $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \wedge \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$. A região Γ_u , corresponde aos requisitos de fronteira cinemática e a região Γ_σ é representada pelas condições de fronteira estáticas, onde as forças de superfície externas, t , são definidas. O corpo é sujeito a forças de massa constantes por unidade de volume (distribuídas no interior do corpo), b , e a forças de superfície externas (ver Figura 2.9).

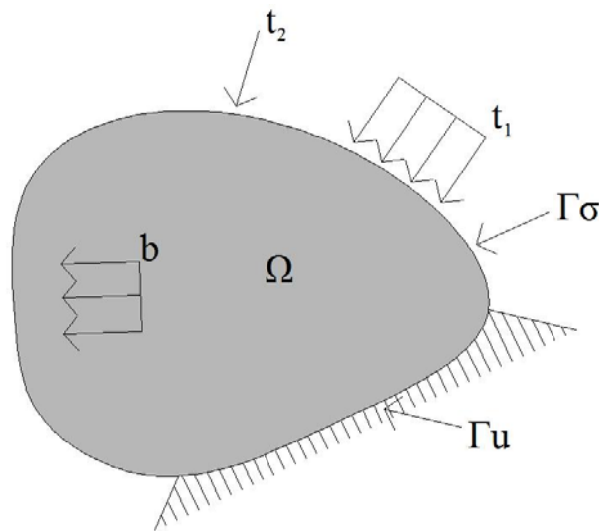


FIGURA 2.9 – Definição do tipo de problema

A solução do problema para o caso tridimensional, apenas fica completa com o conhecimento, para cada ponto do interior do corpo ($\{x\} \equiv \Omega$), das seguintes componentes:

- Das componentes de tensão:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}^T \quad (2.4)$$

- Das componentes de deformação:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^T \quad (2.5)$$

- Das componentes do deslocamento:

$$\{u\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T \quad (2.6)$$

Para a obtenção de todas estas componentes, recorre-se ao uso das seguintes relações:

- As relações entre as deformações-deslocamentos (seis equações):

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{u\} \quad (2.7)$$

onde,

$$[B] = B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

- As relações de equilíbrio (três equações):

$$[B]^T \cdot \{\sigma\} + \{F\} = \{0\} \quad (2.9)$$

onde,

$$\{F\} = \{F_x, F_y, F_z\}^T \quad (2.10)$$

$$\{0\} = \{0, 0, 0\}^T \quad (2.11)$$

- As relações constitutivas (seis equações):

$$\{\varepsilon\} = [D] \cdot \{\sigma\} \quad (2.12)$$

onde através da lei de Hooke generalizada, a matriz D (matriz flexibilidade) é obtida por,

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] \\ [0] & [D_2] \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

sendo,

$$[D_1] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix}, [D_2] = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

em que, E corresponde ao módulo de Young, ν representa o coeficiente de Poisson e G trata-se do módulo de distorção que é obtido por,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.15)$$

Os três valores referidos anteriormente (E , G , ν) correspondem às constantes elásticas do material. Sendo apenas necessário o conhecimentos de duas dessas constantes para a correcta resolução do problema.

Adicionalmente, as componentes da tensão e do deslocamento devem satisfazer as condições de fronteira geométricas ($\{u\} = \{u_0\}$ com $\{x\} \equiv \Gamma_u$) e as condições de fronteira estáticas ($\{t\} = [\sigma] \cdot \{n\} = \{t_0\}$ com $\{x\} \equiv \Gamma_\sigma$), que tornam a solução específica para um problema em particular.

2.3.1.2 Parcela plástica

A teoria da plasticidade corresponde por seu lado à teoria que se aplica no ramo plástico de um diagrama de tensão-deformação (Figura 2.7). O ramo plástico tem início na tensão de cedência e prolonga-se até à tensão de rotura, assim a tensão de cedência corresponde à transição entre o comportamento reversível e o comportamento irreversível. Sempre que se atinge a cedência, a deformação plástica que se gera não será recuperada por simples descarregamento do corpo, isto é, se reduzirmos a tensão para o seu valor inicial vamos recuperar a deformação elástica que ocorreu para obter o estado de tensão, mas a deformação plástica permanecerá no corpo (Figura 2.10).

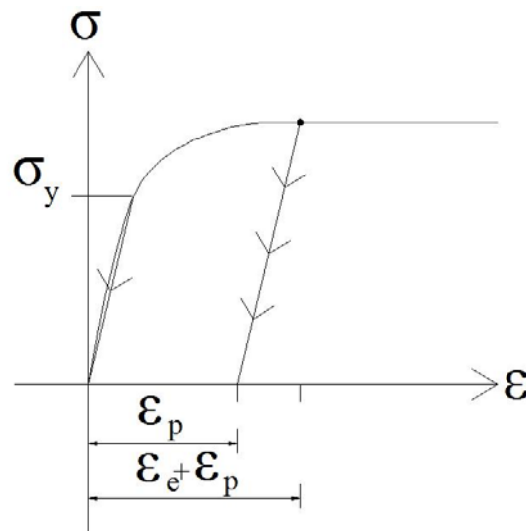


FIGURA 2.10 – Fase de descarregamento, no regime plástico

Assim, a deformação total (ε_T) que se acumulou durante o processo de carregamento, pode ser obtida, se se admitir a hipótese dos pequenos deslocamento, pela soma da deformação elástica (ε_e) com a deformação plástica (ε_p),

$$\varepsilon_T = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (2.16)$$

sendo esta decomposição fulcral para a aplicação de todos os teoremas de comportamento. Logo pode-se estabelecer a equação (2.7), que representa a relação de compatibilidade entre o campo de deslocamentos, u , e o campo das deformações, ε . Em alternativa, pode-se estabelecer uma relação análoga mas mais conveniente no âmbito do presente trabalho, entre o campo das velocidades, \dot{u} , e a taxa das deformações, $\dot{\varepsilon}$,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \quad i, j = x, y, z \quad (2.17)$$

Para descrever o escoamento plástico (que descreve a deformação a seguir à cedência) usou-se uma relação entre a taxa de deformação plástica, $\dot{\varepsilon}_p$, e as componentes de tensão, porque não só, resolve o problema de não existir uma relação directa entre as deformações plásticas e o tensor de tensão, σ , como resolve o problema da irreversibilidade. Assume-se que as componentes da taxa de deformação plástica são arranjadas numa matriz quadrada simétrica (como as componentes da deformação plástica) e que têm como valores principais $\dot{\varepsilon}_I^p, \dot{\varepsilon}_{II}^p, \dot{\varepsilon}_{III}^p$. Considera-se também, pela suposição da hipótese de Saint-Venant que as direcções principais da matriz de tensão e as da matriz da taxa de deformação se encontram alinhadas (se o material for isotrópico e se $\dot{\varepsilon}_p$ depender apenas de σ então a hipótese de Saint-Venant deixa de ser uma suposição para ser uma exigência pelas regras da álgebra linear)[19]. Mas a consequência principal da hipótese de Saint-Venant é a possibilidade de relacionar espacialmente as componentes das tensões com as componentes da taxa de deformação plástica, imprimindo-as no mesmo gráfico, chamado de espaço de tensões principais. De notar que no espaço de tensões principais não estamos a comparar directamente as tensões com as taxas de deformação, porque a escala dos respectivos eixos é diferente.

Olhando agora para o que acontece no espaço das tensões principais, onde um ponto de tensão no regime plástico é definido por se encontrar sobre a superfície de cedência do material, logo para qualquer combinação de tensões (σ_I, σ_{II} e σ_{III}) pode-se também imprimir nesse mesmo gráfico o vector da taxa de deformação, bem como as suas componentes, Figura 2.11. Escolheu-se imprimir $\dot{\varepsilon}_p$

Capítulo 2. Definição do Problema

no ponto de tensão, porque enfatiza o facto que a sua direcção é normal à superfície de cedência caso obedeça às regras de escoamento associadas. Caso as tensões aplicadas ao corpo diminuam, de modo que o ponto de tensão se mova para dentro da superfície de cedência então a deformação plástica cessa, permanecendo no corpo apenas as deformações plásticas. Se o corpo voltar a ser recarregado e o ponto de tensão tocar novamente na superfície de cedência, a deformação poderá começar novamente e o vector $\dot{\epsilon}_p$, será novamente normal à superfície de cedência neste novo ponto. Esta ideia de normalidade do vector da taxa de deformação em relação à superfície de cedência não é muito intuitiva, mas é muito importante.

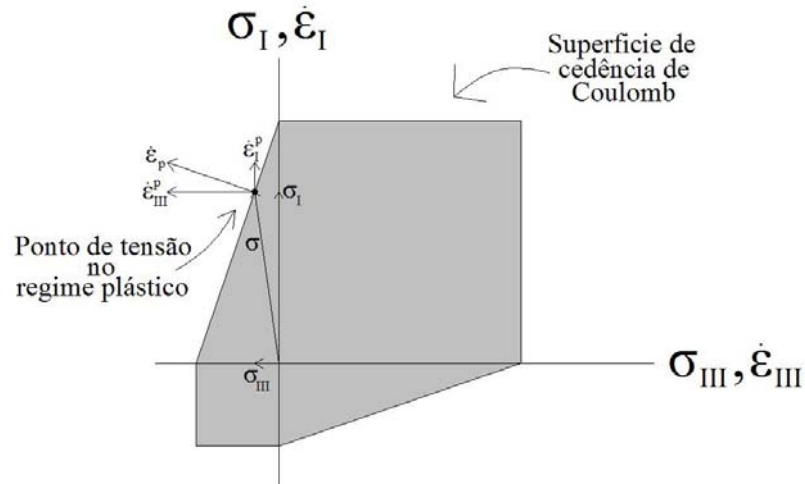


FIGURA 2.11 – Domínio plástico definido pela superfície de cedência de Coulomb – Hipótese de tensão plana

Quando o ponto de tensão coincidir com uma singularidade da superfície de cedência (vértice), caso existam, estamos num caso particular da normalidade. Sempre que isto acontece o vector da taxa de deformação plástica pode ser definido por qualquer vector apontando para fora da superfície, localizado dentro do cone que é formado por todos os vectores normais na vizinhança desse ponto, ver Figura 2.12.

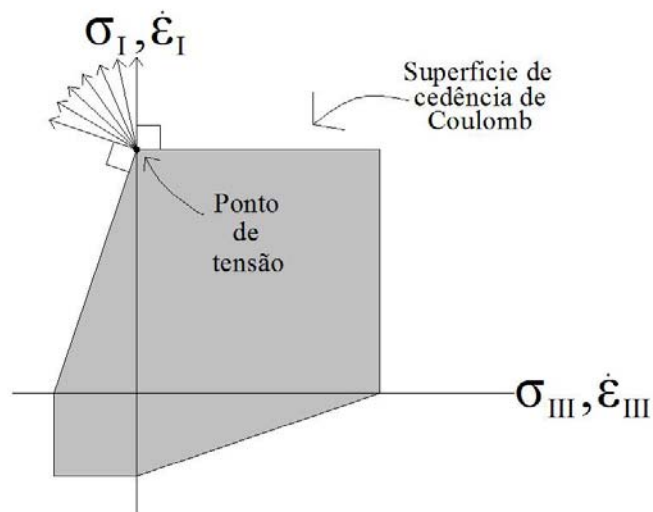


FIGURA 2.12 – Caso particular da normalidade (superfície de Cedência de Coulomb) – Hipótese de tensão plana

Em termos numéricos, a condição do ponto de tensão, $\{\sigma\}$, pertencer ao regime plástico é traduzida pela equação (2.18),

$$f(\sigma) = 0 \text{ em } \{\sigma\} \quad (2.18)$$

isto é, o valor do tensor de tensão deve cumprir no ponto de tensão com a restrição imposta à função que define o critério/superfície de cedência, f .

Os argumentos que definem o critério de cedência, podem ser quase todos os que tenham a ver com o estado do corpo no início do comportamento plástico, mas o mais apropriado candidato para os argumentos são as seis componentes individuais da matriz de tensão. Assim sendo, pode-se escrever o protótipo de um critério de cedência como:

$$f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}) = k \quad (2.19)$$

onde k representa uma constante, enquanto f corresponde a uma simples função que tem as tensões como argumentos centrais. Pode não ser necessário conhecer todas as componentes de tensão dado que se pode recriar as componentes da tensão em qualquer sistema de coordenadas usando as tensões principais, mas para isso é necessário conhecer as respectivas orientações das direcções principais. Caso não se adicione qualquer argumento à função, f , a superfície de cedência encontrar-se-á fixa no espaço.

De seguida, define-se a taxa do trabalho plástico, \dot{W}_p , que representa o trabalho das tensões sempre que o corpo se deforma (considerando o caso particular do sistema de coordenadas se encontrar alinhado com as direcções principais),

$$\forall \sigma : f(\sigma) = 0, \quad \dot{W}_p = \int_{\Omega} \sigma^T \dot{\epsilon}_p \, d\Omega = \text{tr}(\sigma \dot{\epsilon}) = \sigma_I \dot{\epsilon}_I^p + \sigma_{II} \dot{\epsilon}_{II}^p + \sigma_{III} \dot{\epsilon}_{III}^p \geq 0 \quad (2.20)$$

onde visualmente o traço do produto da tensão com a taxa de deformação representa o comprimento da projecção da tensão na direcção $\dot{\epsilon}$. Conclui-se que, se o vector da taxa de deformação fosse colocado em outro ponto qualquer da superfície de cedência não maximizaria a taxa do trabalho plástico, sendo que esta maximização apenas será atingida quando $\dot{\epsilon}_p$, for exterior e normal à superfície de cedência, correspondendo a uma consequência da aplicação da taxa do trabalho plástico máximo [22], ver Figura 2.11.

As outras duas consequências da aplicação da taxa do trabalho plástico máximo são:

- A superfície de cedência define obrigatoriamente um espaço convexo de tensões admissíveis. Esta consequência é facilmente constatada, mediante a interpretação da condição presente em (2.20) como uma restrição imposta ao produto interno entre dois vectores, conforme ilustrado na Figura 2.13.

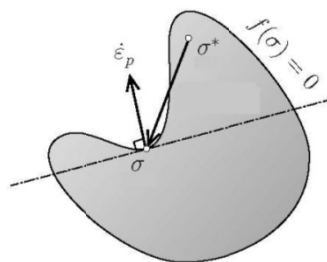


FIGURA 2.13 – Consequência do trabalho plástico máximo: Convexidade [1]

- A taxa da dissipação plástica por unidade de volume, D , definida pelo produto interno das tensões pela taxa de deformação plástica,

$$D(\sigma, \dot{\epsilon}) = \sigma : \dot{\epsilon}_p \quad (2.21)$$

que deriva da própria definição da dissipação plástica (2.21) e da normalidade da taxa de deformação face à superfície de cedência. A taxa de dissipação de energia plástica pode ser reformulada, tendo em consideração (2.18), (2.20), (2.22) e (2.23) de forma a depender apenas das taxas de deformação plásticas [23]. É de salientar no entanto que, mesmo para superfícies não estritamente convexas, caracterizadas por múltiplas hipóteses de estados de tensão associados a determinada taxa de deformação plástica, a dissipação conserva-se ainda como função unívoca da taxa de deformação. Este facto é ilustrado na Figura 2.14 recorrendo ao critério de Mohr-Coulomb para um estado plano de deformação.

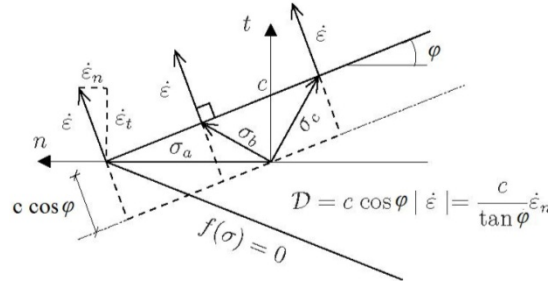


FIGURA 2.14 – Dissipação numa superfície de cedência não estritamente convexa [1]

A forma numérica mais simples de introduzir a condição de normalidade é definir uma regra de escoamento,

$$\dot{\epsilon}(\sigma) = \alpha \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma}, \quad \alpha \in R_0^+ \quad (2.22)$$

onde a derivada parcial, $\partial f / \partial \sigma$, implica a derivada com respeito a qualquer componente de tensão a partir do qual a expressão da componente respectiva da matriz da taxa de deformação plástica é obtida e o multiplicador plástico (semelhante a um multiplicador de Lagrange), α , representa a magnitude das componentes da taxa de deformação que será indeterminada a menos que mais informação seja fornecida. A equação (2.22) assegura, como já foi dito anteriormente, que $\dot{\epsilon}$ é normal à superfície de cedência, mas se o sistema de coordenadas estiver alinhado com as direcções principais do tensor das tensões então a equação (2.22) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\dot{\epsilon}_k = \alpha \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_k}, \quad k = I, II, III \quad (2.23)$$

As equações (2.22) e (2.23) são chamadas de regras de escoamento associadas, atendendo ao facto que as deformações plásticas são associadas directamente com a superfície de cedência. Por outro lado, uma regra de escoamento não associada corresponde a substituir nestas mesmas equações a função que define o critério de cedência, f , por outra função, g . Onde as regras de escoamento não associadas vão geralmente negar muitas das vantagens das condições de normalidade, mas podem ser mais desejáveis para certos tipos de materiais ou teorias mais avançadas. Para um maior aprofundamento sobre as regras de escoamento não associado consultar [19].

2.3.2 Leis constitutivas

As leis constitutivas correspondem a modelos utilizados para simular o comportamento real do corpo. Como o comportamento real do corpo é de difícil obtenção, o que torna ainda mais difícil a sua implementação, por vezes opta-se pela simplificação dessa lei de comportamento. Devendo-se ter no entanto em conta que essa simplificação deverá traduzir os aspectos considerados fundamentais na modelação pretendida. Apresenta-se apenas a lei rígido-plástica por ser a mais útil para esta dissertação.

O comportamento de um corpo que respeita este modelo é caracterizado por numa primeira fase, exibir um comportamento rígido, até atingir a cedência. A partir da cedência inicia-se a segunda fase, onde o corpo exibe um comportamento plástico até atingir a rotura. O modelo de cálculo utilizado pelo SUBLIM3d corresponde a um caso específico deste modelo, correspondendo a um comportamento rígido perfeitamente plástico, ver Figura 2.15. Este modelo apresenta como principal característica o facto das deformações plásticas, quando ocorrerem se processarem inevitavelmente de forma incontrolável, o que significa que o seu aparecimento implica necessariamente o facto de se ter atingido o colapso da estrutura.

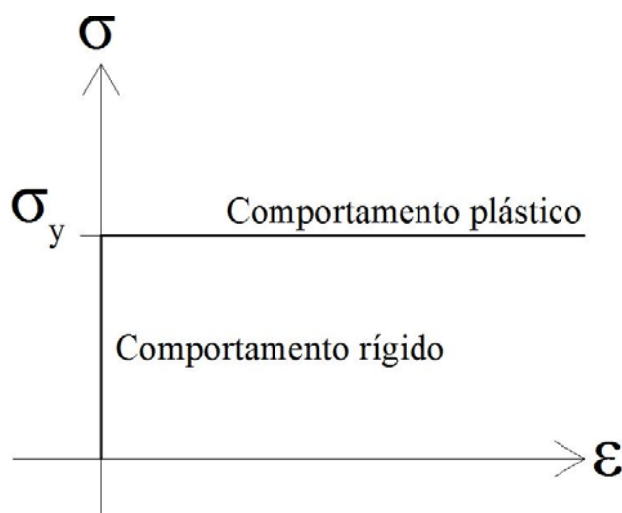


FIGURA 2.15 – Diagrama tensão-deformação de um corpo rígido perfeitamente plástico

2.3.2.1 Definição/Considerações do tipo de problema

Um corpo rígido perfeitamente plástico ocupa um volume, Ω , com fronteira definida pela superfície Γ , que o envolve. A superfície Γ é constituída por duas partes complementares (Γ_u e Γ_o). Na região Γ_u , exposta pelo requisito de fronteira cinemática o campo de deslocamento, u , é fixo e nulo (condição de fronteira de Dirichlet):

$$\{u\} = \{0\} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.24)$$

Por outro lado, Γ_o é representada pelas condições de fronteira estáticas, onde as forças de superfície externas, t , são definidas.

Suponha-se que o corpo é submetido a dois grupos de carregamentos, os que são afectados e os que não são afectados pelo multiplicador λ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$). Estes dois grupos encontram-se diferenciados por meio da introdução de um til superior à letra que define o carregamento, no caso do carregamento que não são afectados pelo multiplicador. Em cada grupo podem existir forças de

massa constantes por unidade de volume (distribuídas no interior do corpo), b , e forças de superfície externas, t (ver Figura 2.9). Considera-se que as aplicações das forças destes grupos são feitas em condições quase estáticas, permitindo desprezar quaisquer efeitos de inércia.

Para este tipo de materiais, o campo de velocidade não tem de ser contínuo em todo o domínio. Por isso, a taxa da dissipação plástica, pode ser reescrita como,

$$D = D(\dot{\varepsilon}) + D(\hat{v}), \quad \dot{\varepsilon} \in C_c, \quad \hat{v} \in C_d \quad (2.25)$$

onde, doravante, $\dot{\varepsilon}$ representa apenas as componentes contínuas da deformação plástica, e \hat{v} simboliza as possíveis componentes descontínuas. Os espaços C_c e C_d são definidos de forma a forçar implicitamente o cumprimento com a regra de escoamento normal, equação (2.22) e (2.23), através do confinamento para esses espaços, da taxa do tensor da deformação plástica admissível e das descontinuidades da velocidade, respectivamente. Do ponto de vista físico, as referidas descontinuidades podem ser observadas como uma variação no campo da taxa das deformações plásticas localizadas numa zona de espessura infinitesimal de material. Deste modo, estas descontinuidades encontram-se igualmente sujeitas às lei de escoamento (2.22) e (2.23). Em Salençon [23], pode ser encontrado um tratamento matemático rigoroso das descontinuidades no campo das velocidades.

Por último, como os deslocamentos sofridos pelo corpo são muito pequenos quando comparados com a sua menor dimensão, considera-se como válida a hipótese de linearidade geométrica (sendo igualmente válida a hipótese das pequenas deformações), permitindo assim que as condições de equilíbrio possam ser estabelecidas com base na configuração indeformada da estrutura, isto é, podem-se desprezar quaisquer efeitos de segunda ordem.

2.3.3 Estados planos

Um grande conjunto de problemas é abrangido pelas condições geométricas e mecânicas dos estados planos de tensão plana e de deformação plana.

As condições de tensão plana correspondem a problemas onde todas as tensões associadas com uma direcção das coordenadas são assumidas como nulas. Se o sistema de coordenadas for arranjado de forma a que a tensão nula da direcção particular seja a direcção z , então a matriz de tensão apresenta o seguinte aspecto:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Em contraste, as condições de deformação plana referem-se a situações onde se assume que todas as componentes de deformação associadas com uma direcção das coordenadas são idênticas a zero. Escolhendo a direcção z para ser a direcção apropriada, a matriz de deformação para as condições de deformação plana pode ser apresentada como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

A simplificação para estes estados planos pode ser executada sempre que segundo o eixo escolhido, z , não existe dependência da carga, das propriedades e da geometria do corpo.

2.4 Métodos de Resolução do problema

No presente subcapítulo apresenta-se uma revisão bibliográfica dos principais métodos de resolução do problema da simulação numérica da alvenaria. Esta apresentação não pretende efectuar um relato exaustivo de todos os métodos existentes, mas antes fornecer uma ideia dos trabalhos considerados mais marcantes neste domínio.

Começa-se primeiro por caracterizar a análise linear e a análise não linear, que devido à sua complementaridade serão descritas em conjunto. A análise linear distingue-se fundamentalmente da análise não linear através da sua rigidez sendo, a forma do material e o próprio material os factores principais que a afectam. Logo, a rigidez não é constante à medida que a estrutura se deforma.

O princípio fundamental da análise linear corresponde, no caso da alteração da rigidez ser reduzida, a assumir que a sua forma e as propriedades do material não se alteram durante o processo de deformação. Isto significa que, durante todo o processo de deformação, o modelo mantém a rigidez que possui na sua forma indeformada antes de se sujeitar ao carregamento. Esta hipótese simplifica muito a formulação do problema bem como a sua solução. Sendo a equação fundamental desta análise a equação (2.28),

$$\{F\} = \{K\} * [d] \quad (2.28)$$

onde F é o vector das cargas nodais, d por seu lado é o vector dos deslocamentos nodais e por último K é a matriz de rigidez que depende para além da geometria e das propriedades do material, das restrições impostas.

Considerando o princípio fundamental da análise linear, de que a rigidez do modelo não se altera, tem-se que a equação (2.28) apenas é resolvida uma vez. Este tipo de análise é resolvido relativamente rapidamente, mesmo para grandes modelos.

Tudo se altera quando se entra na análise não linear, atendendo a que a rigidez neste caso se altera durante o processo de deformação. Assim, a matriz K deve ser actualizada à medida que se progride na resolução do problema, executada através de um processo iterativo.

Embora este processo de alteração da rigidez seja comum a todos os tipos de análises não lineares, a origem do comportamento não linear pode ser diferente. Assim, classificam-se as análises não lineares tendo como base a origem da não linearidade. Caso ocorram alterações na rigidez devido, principalmente, a alterações na forma, o comportamento não linear é definido como não linearidade geométrica. O factor principal para reconhecer que estamos neste caso particular da não linearidade, é o corpo apresentar grandes deformações que são visíveis a olho nu. Por outro lado, caso ocorram alterações na rigidez devido principalmente a alterações nas propriedades do material, o comportamento não linear é definido como não linearidade material. Onde este caso particular da não linearidade, deve ser usado tanto em situações onde o carregamento origine deformações permanentes, como em casos onde as deformações geradas são muito elevadas. Assim, a análise não linear material deve ser aplicada para situações em que se pretenda explicar o comportamento após a cedência (encurvamento, etc.). Por último, a origem da alteração da rigidez pode também ser devida às cargas aplicadas, onde dependendo da forma de aplicação, pode tanto aumentar ou diminuir a rigidez.

Como ilação da análise linear e não linear, conclui-se que a análise linear assume-se como uma ferramenta mais prática, mas que apenas pode ser aplicada a materiais elásticos e que por seu lado a análise não linear apresenta uma elevada complexidade na formulação do problema e exhibe um tempo de solução elevado, razões pelas quais mesmo hoje em dia, os engenheiros se encontram relutantes em usar análises não lineares.

Dentro da análise não linear existe o método de elementos discretos ou método de elementos distintos (MED) proposto por P.A. Cundall [7], que corresponde a modelar o material através de um conjunto de partículas discretas. Estas partículas (podem ser consideradas como rígidas ou deformáveis) são definidas por funções matemáticas e a interacção com as partículas adjacentes são feitas através de forças de contacto. À medida que o conjunto de partículas se deforma, existe a possibilidade de o contacto entre elas ser criado ou extinto, mas movem-se sempre para posições de equilíbrio de acordo com a lei de Newton.

Os problemas estáticos são resolvidos por uma aproximação dinâmica onde o processo de cálculo é realizado em pequenos intervalos de tempo, para que a perturbação que se gera, não se propague além da vizinhança mais próxima de cada partícula. Esta hipótese otimiza o uso da memória computacional evitando o uso de processos iterativos permitindo, assim, a representação de interacções não lineares entre um grande número de partículas.

Este método apresenta como principal desvantagem o elevado esforço computacional que é exigido, limitando tanto a extensão da simulação como o número de partículas usado. Apresenta como vantagem mais relevante a capacidade de executar um estudo mais detalhado da microdinâmica dos fluxos das partículas que o obtido através de experiências físicas.

De uma forma geral, mas desprezando como simplificação a rotação como grau de liberdade, a formulação deste método resume-se à aplicação da Segunda Lei de Newton às partículas (que conduz ao cálculo dos deslocamentos) e à aplicação das Leis de força-deslocamentos aos contactos (que calculam as forças nos nós). Assim cada partícula possui uma equação de movimento descrita da seguinte forma,

$$M\ddot{u} + C\dot{u} = F_{cont}(\dot{u}, \ddot{u}) + F_{elem}(\dot{u}, \ddot{u}) + F_{int}(\dot{u}, \ddot{u}) + F_{ext}(t) \quad (2.29)$$

onde M e C são respectivamente as matrizes de massa e amortecimento da partícula. A parcela total das forças é composta pelas forças de contacto entre as partículas (F_{cont}), pelas forças geradas através dos elementos lineares de vínculo entre duas partículas (F_{elem}), pelos esforços internos (F_{int}) que serão nulos caso as partículas sejam consideradas como rígidas e pelas acções externas aplicadas (F_{ext}).

Por último, nos métodos das análises não lineares descreve-se a análise limite, que devido a ser a abordagem que baseia a ferramenta de cálculo proposta para a resolução do problema, será apresentada no seguinte tópico:

2.4.1 Análise Limite

Optou-se pela análise limite como sendo a abordagem escolhida para o método de resolução do problema, dado se tratar de uma técnica promissora para resolver este tipo de problema, devido aos seguintes aspectos:

- Possibilidade da compreensão suficiente do mecanismo de colapso;
- Percepção da distribuição da deformação última (pelo menos, nas secções críticas), no teorema cinemático;
- Entendimento da capacidade de carregamento;
- Simplicidade para ser inserida numa ferramenta computacional prática;
- Necessidade de um reduzido número de parâmetros dos materiais, aspecto que se revela de particular importância atendendo à dificuldade em obter parâmetros experimentais fiáveis para as alvenarias;
- Não exhibe problemas de acumulação de erro;

Contudo, o uso da formulação baseada nesta análise também apresenta limitações: Em primeiro lugar, esta abordagem apenas pode ser aplicada a materiais elásticos perfeitamente plásticos ou a materiais perfeitamente plásticos com plasticidade associada, inseridos em problemas geometricamente lineares e apresentando carregamentos monotónicos. Por último, este tipo de análise não consegue prever o comportamento da estrutura durante o estado pré-colapso.

A Análise Limite debruça-se sobre a determinação das cargas de colapso de sistemas mecânicos. Deste modo, é conveniente clarificar o que se entende como determinação das cargas de colapso. A actividade de determinação das cargas de colapso está totalmente relacionada com descobrir a carga que conduzirá o sistema para o estado iminente de colapso. Não se deve confundir a carga de colapso com a carga de cedência, embora em alguns casos possam ter o mesmo valor, mas na maioria das situações a cedência ocorre muito antes do colapso do sistema.

Introduza-se agora o conceito de carregamento admissível, que corresponde a um carregamento para o qual é possível obter uma distribuição de tensões equilibradas, que respeite em todo o domínio a condição de cedência (2.18). Entende-se por distribuição de tensões equilibradas, um campo de tensões que respeite as condições de equilíbrio não só no domínio,

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (2.30)$$

como também nas fronteiras estáticas,

$$\sigma \cdot n = t \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2.31)$$

onde n representa o versor da normal exterior à fronteira e b_j representa a componente na direcção j do vector das forças de massa.

Assim, considera-se que um sistema mecânico atingiu o carregamento limite, estando iminente o seu colapso, sempre que para um carregamento admissível possam ocorrer deformações plásticas na estrutura. Para um conjunto genérico de carregamentos (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) é possível definir-se uma região de carregamentos admissíveis (ver Figura 2.16).

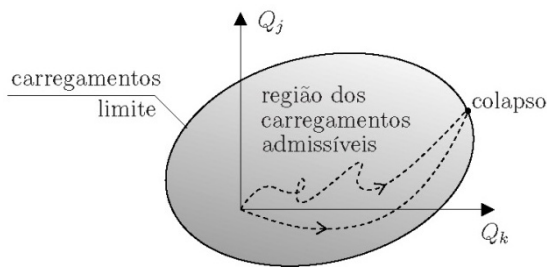


FIGURA 2.16 – Domínio dos carregamentos admissíveis [1]

Como nota da Figura 2.16, observa-se que a região de carregamentos admissíveis herda as propriedades de convexidade da superfície de cedência e que a carga de colapso do sistema não é influenciada pela trajetória do carregamento, como se pretende ilustrar através das duas trajetórias representadas a tracejado [23].

As três principais ferramentas da análise limite são o teorema estático que conduz à obtenção de um valor inferior ao conjunto das cargas admissíveis, o teorema cinemático que conduz à obtenção de um valor exterior ao conjunto das cargas admissíveis e o teorema da unicidade que leva à obtenção do carregamento limite (sendo que no presente trabalho apenas se irá expor os dois primeiros teoremas). Através destes teoremas pode-se retirar conclusões sobre a possibilidade de dado carregamento ser passível de ser suportado e consequentemente sobre a carga de colapso de uma estrutura. Deste modo eles constituem uma poderosa ferramenta teórica que permite através de uma forma expedita a obtenção de majorantes/minorantes para as cargas de colapso.

Admite-se então um sistema mecânico que verifica as limitações e que aceita como válido o princípio do trabalho plástico máximo, logo estas premissas garantem a validade dos teoremas a seguir enunciados:

2.4.1.1 Teorema da região inferior (Teorema Estático)

Este teorema diz que se for possível encontrar pelo menos um campo de tensões que seja admissível, isto é, onde as condições de cedência (2.18) e de equilíbrio (2.30) se verifiquem localmente em todo o domínio e que satisfaça igualmente a condição de equilíbrio (2.31) na fronteira estática, então o carregamento pertence à região dos carregamentos admissíveis (ou suportáveis) e o corpo não colapsará (estas condições permitem considerar campos de tensão que não seriam fisicamente razoáveis em condições normais). Qualquer campo de tensão que satisfaça o critério do teorema da região inferior é chamado de campo de tensão estaticamente admissível. A carga obtida por este teorema, devido a ser um valor interior ao conjunto das cargas admissíveis pelo corpo, será a favor da segurança para motivos de dimensionamento.

A aplicação do teorema estático segue resumidamente as seguintes etapas:

1. Cria-se como hipótese um campo de tensão estaticamente admissível;
2. Tenta-se obter os valores particulares da tensão através das condições de equilíbrio, mas haverá sempre um ou mais destes valores que não serão totalmente especificados;
3. Tenta-se ajustar as tensões indeterminadas para que a carga aplicada na estrutura seja maximizada, e a condição de cedência seja satisfeita em todo o domínio;
4. A carga resultante torna-se na estimativa do teorema da região inferior para a carga de colapso real da estrutura.

2.4.1.2 Teorema da região superior (Teorema Cinemático)

Por outro lado, este modelo procura estabelecer uma estimativa do carregamento limite através da determinação do menor carregamento potencialmente não suportável, resultando assim na obtenção de um majorante da carga de colapso, logo, o teorema aqui exposto resulta na procura de um campo de velocidades (não trivial) cinematicamente admissível que minimize a diferença entre a potência dissipada plasticamente e a potência das forças exteriores.

Assim, o colapso deve ocorrer se, para qualquer deformação plástica compatível, a taxa do trabalho das forças exteriores no corpo for igual ou superior à taxa de energia de dissipação interna. A deformação plástica compatível corresponde a uma deformação que verifica todas as condições de fronteira dos deslocamentos e que seja possível cinematicamente, isto é, nas deformações do corpo podem ocorrer lacunas, sobreposições ou separações. Mesmo assim, existe um grande número de mecanismos de deformação possíveis, mas o objectivo corresponde a investigar aqueles que são suficientemente simples para fornecer resultados úteis. Qualquer campo de deformação que satisfaça o critério do teorema da região superior é chamado de campo de deformação cinematicamente admissível. A carga obtida por este teorema, devido a ser exterior ao conjunto das cargas admissíveis do corpo, será contra a segurança para motivos de dimensionamento.

No presente documento será adoptado o teorema aqui exposto (teorema cinemático). A aplicação deste teorema segue resumidamente as seguintes etapas:

1. Cria-se como hipótese um campo de velocidade cinematicamente admissível, logo deve obedecer à regra de escoamento normal associado (2.23), à condição de fronteira de Dirichlet (2.24), às condições de compatibilidade na fronteira cinemática, Γ_u ,

$$\dot{u} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.32)$$

e à equação de compatibilidade:

$$\dot{\epsilon} = B\dot{u} \quad \text{em } \Omega \quad (2.33)$$

onde $\dot{\epsilon}$ representa o tensor da taxa de deformação plástica, \dot{u} representa o tensor da taxa dos deslocamentos e B é o operador padrão de compatibilidade diferencial, para o caso tridimensional (equação (2.8));

2. Calcula-se a taxa do trabalho das forças exteriores aplicada ao sistema, W_e , de acordo com o expresso no capítulo 2.3.2.1:

$$W_e = \lambda W_\lambda + \tilde{W} \quad (2.34)$$

onde,

$$W_\lambda = \int_\Omega b^T \dot{u} D\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} t^T \dot{u} D\Gamma \quad (2.35)$$

$$\tilde{W} = \int_\Omega \tilde{b}^T \dot{u} D\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \tilde{t}^T \dot{u} D\Gamma \quad (2.36)$$

3. Calcula-se a taxa de dissipação da energia plástica interna, W_D , que dependerá da escolha do campo de velocidade, mas será independente da carga aplicada ao sistema, de acordo com o expresso no capítulo 2.3.2.1:

$$W_D = \int_{\Omega} D(\dot{\varepsilon}) D\Omega + \int_{\Gamma_d} D(\dot{v}) D\Gamma \quad (2.37)$$

onde D representa a taxa de dissipação de energia plástica interna total por unidade de volume que pode ser expressa apenas em termos de campos cinemáticos e Γ_d representa a região em que ocorre as descontinuidades do campo de velocidade [23];

4. Relacionam-se estas duas taxas:

$$W_e \geq W_D \quad (2.38)$$

se a equação se verificar então o colapso da estrutura irá ocorrer;

5. Iguala-se a equação (2.38) e resolve-se a equação em ordem ao multiplicador;
6. O multiplicador resultante, chamado de multiplicador de colapso (λ_c), torna-se na estimativa do teorema da região superior para a verdadeira carga de colapso da estrutura.

Para compreender a evolução das formulações implementadas no SUBLIM3d basta consultar [1].

2.5 Funções de dissipação

Neste tópico são enumeradas todas as funções de dissipação associadas aos critérios de cedência utilizados neste trabalho, bem como a sua definição do espaço auxiliar, C_c . As expressões aqui adoptadas seguem a definição apresentada por Salençon [23]. As referidas expressões são definidas no espaço das tensões e das deformações principais, pressupondo a seguinte ordenação:

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \quad (2.39)$$

Não se define o espaço C_d (espaço que afecta as descontinuidades no campo de velocidade), porque o modelo numérico proposto impõe-o implicitamente através dos elementos de junta (elementos colapsados), como será descrito posteriormente.

2.5.1 Critério de Mohr-Coulomb

A forma usual do critério de Mohr-Coulomb é:

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi \quad (2.40)$$

onde τ , c e σ representam a tensão de corte, a coesão do material e a tensão normal, respectivamente e o ângulo φ é referido como o ângulo de atrito interno do material. Este critério de cedência corresponde a uma linha recta no diagrama de Mohr como se pode ver pela Figura 2.17.

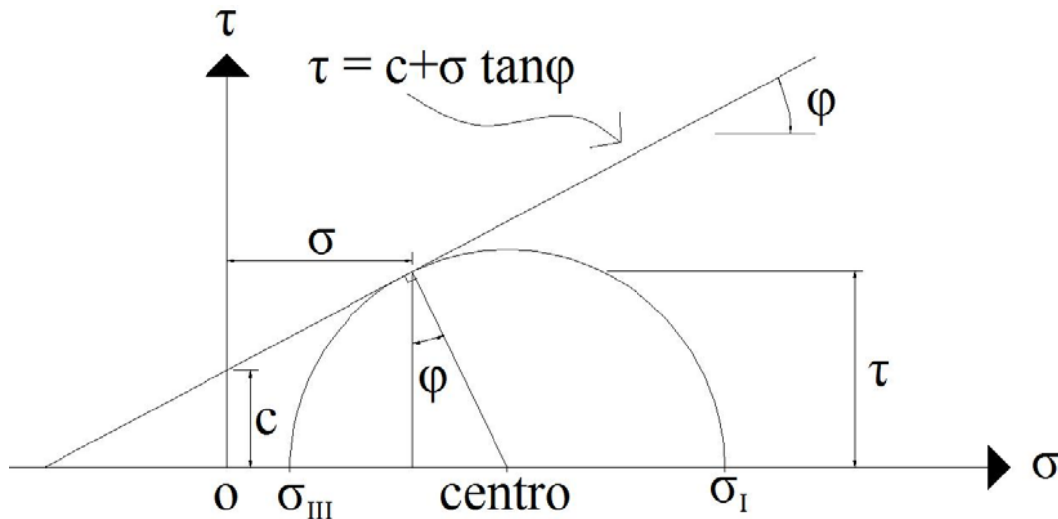


FIGURA 2.17 – Critério de cedência de Mohr - Coulomb

Reformulando a equação (2.40), de forma a escrever-se o critério de cedência em ordem às tensões principais, obtêm-se que,

$$f(\sigma) = \sigma_I(1 + \sin \varphi) - \sigma_{III}(1 - \sin \varphi) - 2c \cos \varphi \quad (2.41)$$

em que a sua representação gráfica corresponde a uma pirâmide em expansão e a sua secção transversal equivale a um hexágono irregular, ver Figura 2.18.

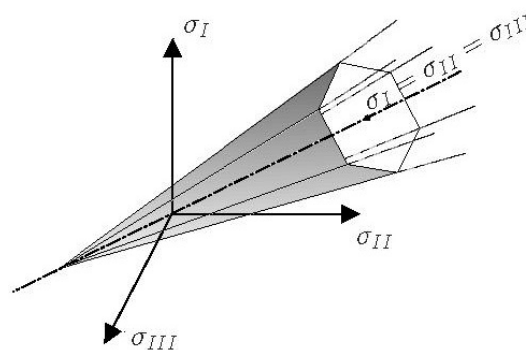


FIGURA 2.18 – Representação gráfica da superfície de cedência de Mohr-Coulomb [1]

Para o presente problema é mais relevante a representação do lugar geométrico em duas dimensões, exibido na Figura 2.19.

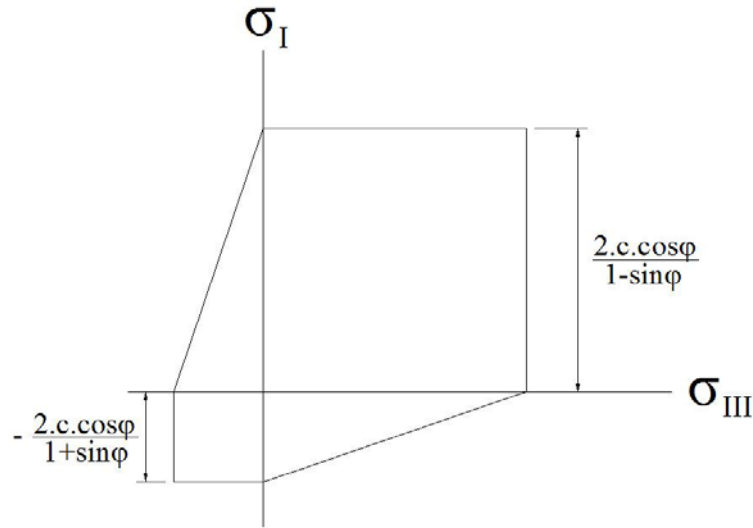


FIGURA 2.19 – Superfície de cedência de Mohr-Coulomb em duas dimensões – Hipótese de tensão plana

Define-se agora a expressão da dissipação do material em estudo neste tópico bem como a sua definição de espaço auxiliar, usando sempre as componentes das deformações principais (consultar Tabela 2.1).

TABELA 2.1 – Função da taxa de dissipação da energia plástica para o critério de Mohr - Coulomb

| Critério | $D(\dot{\epsilon})$ | $\dot{\epsilon} \in C_c$ |
|----------------|--|---|
| Mohr – Coulomb | $\frac{c}{\tan \varphi} \text{tr}(\dot{\epsilon})$ | $\text{tr}(\dot{\epsilon}) \geq (\dot{\epsilon}_I + \dot{\epsilon}_{II} + \dot{\epsilon}_{III}) \sin \varphi$ |

2.5.2 Critério de Armando Nunes Antão

Em comunicação privada [4] foi proposta uma função de cedência constituída por três zonas (em ordem às tensões principais):

Truncatura à tracção, associado com a rotura por tracção (modo I):

$$f_1(\sigma) = \sigma_I - T_t \quad (2.42)$$

Critério de Mohr – Coulomb, associado com a rotura por corte (modo II):

$$f_2(\sigma) = \sigma_I(1 + \sin \varphi) - \sigma_{II}(1 - \sin \varphi) - 2c \cos \varphi \quad (2.43)$$

Truncatura à compressão, associado com a rotura por compressão (modo III):

$$f_3(\sigma) = -\sigma_{II} - T_c \quad (2.44)$$

onde T_c e T_t representam a truncatura à compressão e à tracção, respectivamente. Considera-se que estas truncaturas apenas possuem valores maiores ou iguais a zero, devido a representarem o valor da truncatura em módulo. A representação gráfica deste critério no diagrama de Mohr é representada na Figura 2.20.

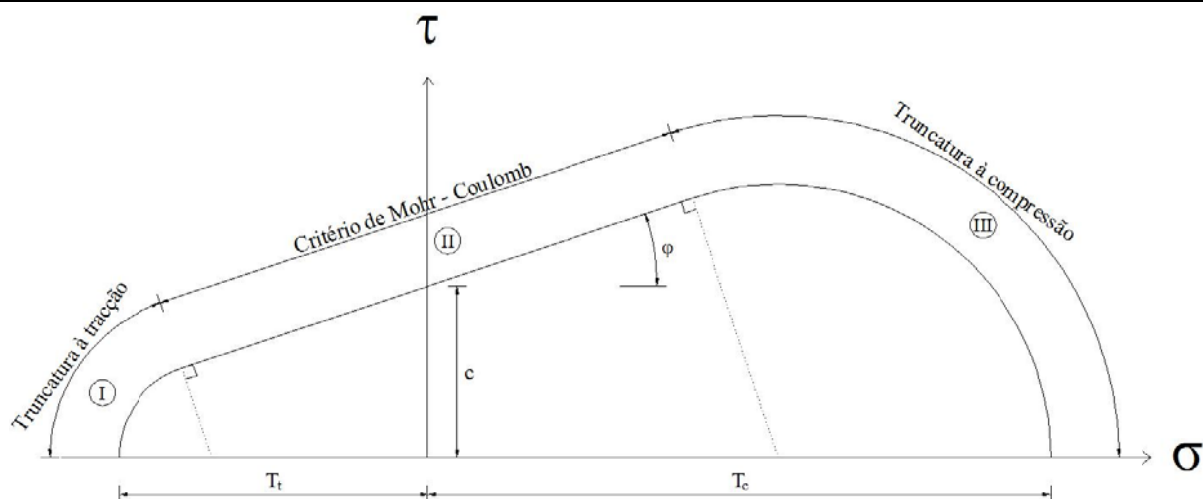


FIGURA 2.20 – Critério de cedência proposto em [4]

Define-se agora a expressão da dissipação deste critério, bem como a sua definição de espaço auxiliar, usando sempre as componentes das deformações principais, consultar Tabela 2.2,

TABELA 2.2 – Função da taxa de dissipação da energia plástica para o critério [4]

| Critério | Modo(s) | $D(\dot{\epsilon})$ | $\dot{\epsilon} \in C_c$ |
|---------------------------|----------|---|---|
| Armando Nunes Antão | I | $c(tr(\dot{\epsilon}) - tr(\dot{\epsilon})) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{T_t}{1 - \sin \varphi} (tr(\dot{\epsilon}) - tr(\dot{\epsilon}) \sin \varphi)$ | $tr(\dot{\epsilon}) > tr(\dot{\epsilon}) \sin \varphi$ |
| | II e III | $H tr(\dot{\epsilon}) - \frac{(T_c + H)}{1 + \sin \varphi} (tr(\dot{\epsilon}) - tr(\dot{\epsilon}) \sin \varphi)$ | $tr(\dot{\epsilon}) \leq tr(\dot{\epsilon}) \sin \varphi$ |

onde,

$$H = \frac{c}{\tan \varphi} \quad (2.45)$$

$$tr(\dot{\epsilon}) = \dot{\epsilon}_I + \dot{\epsilon}_{II} + \dot{\epsilon}_{III} \quad (2.46)$$

$$tr(|\dot{\epsilon}|) = |\dot{\epsilon}_I| + |\dot{\epsilon}_{II}| + |\dot{\epsilon}_{III}| \quad (2.47)$$

Este critério foi baseado nos conceitos de truncatura do modelo de interface composto proposto por Lourenço [6], mas considerou-se no presente critério diferentes modos de truncatura (Figura 2.21):

- Na truncatura à tracção, em vez de ser um corte recto vertical optou-se por uma truncatura circular;
- Na truncatura à compressão, em vez de ser uma truncatura elíptica considerou-se uma truncatura circular;

Estas alterações realizadas conduzem a um comportamento do material mais real, porque (Figura 2.21):

- Elimina-se os vértices da superfície de cedência, que são de difícil realização por parte da natureza;
- Realiza-se as truncaturas sempre através de círculos de Mohr, que é a melhor representação do estado de tensão de um material;

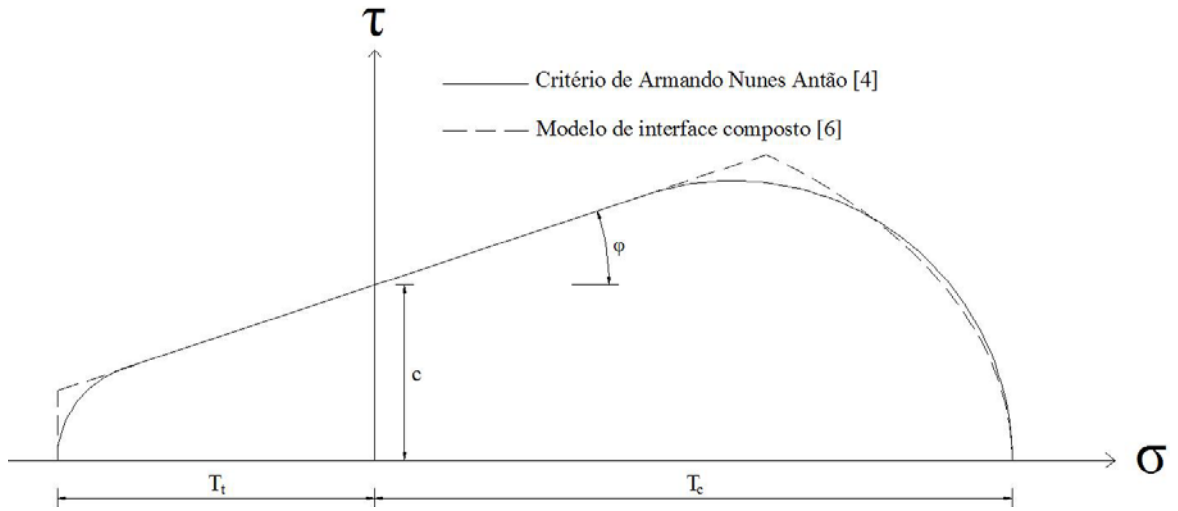


FIGURA 2.21 – Comparação do modelo de interface composto[6] com o critério de Armando Nunes Antão[4]

Sendo o comportamento do material mais próximo da realidade obtêm-se melhores resultados, quando comparados com os existentes na literatura, como será demonstrado mais à frente.

2.5.3 Critério de Mário Vicente da Silva

Também em comunicação privada [5] foi proposta pelo professor Mário Vicente da Silva um critério de cedência constituído por três zonas (em ordem às tensões principais):

Truncatura à tracção, associado com a rotura por tracção (modo I):

$$f_1(\sigma) = \sigma_I - T_t \quad (2.48)$$

Critério de Mohr – Coulomb, associado com a rotura por corte (modo II):

$$f_2(\sigma) = \sigma_I(1 + \sin \varphi) - \sigma_{II}(1 - \sin \varphi) - 2c \cos \varphi \quad (2.49)$$

Truncatura ao corte, associado também com a rotura por corte (modo III):

$$f_3(\sigma) = \sigma_I - \sigma_{II} - T_c \quad (2.50)$$

onde a sua representação gráfica no diagrama de Mohr é apresentada na Figura 2.22.

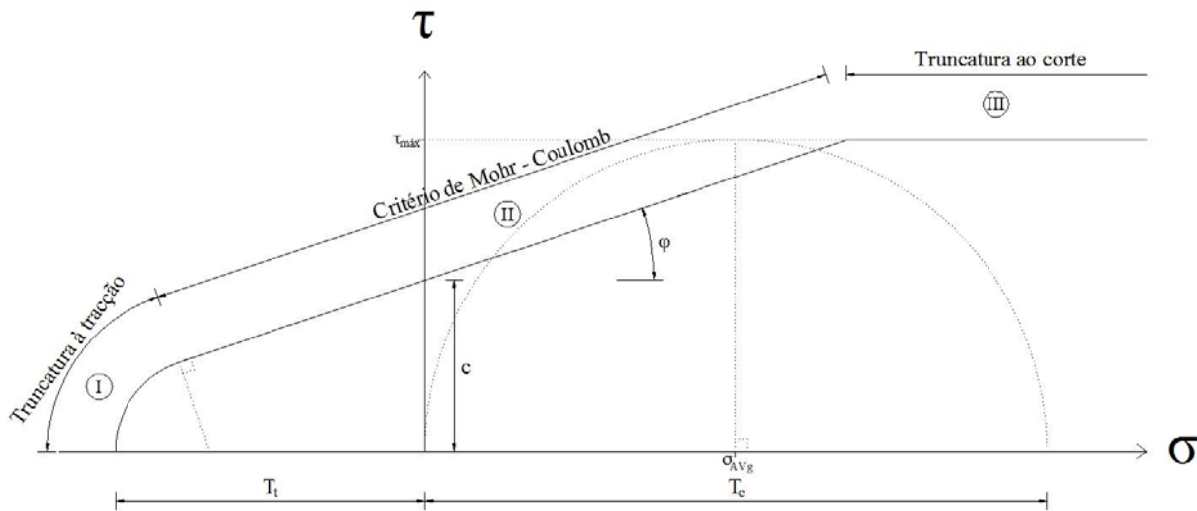


FIGURA 2.22 – Critério de cedência proposto em [5]

Define-se agora a expressão da dissipação deste critério, bem como a sua definição de espaço auxiliar, usando sempre as componentes das deformações principais (consultar Tabela 2.3).

TABELA 2.3 – Função da taxa de dissipação da energia plástica para o critério [5]

| Critério | Modo(s) | $D(\dot{\epsilon})$ | $\dot{\epsilon} \in C_c$ |
|------------------------------|----------|---|--|
| Mário Vicente da Silva | I | $c(tr(\dot{\epsilon}) - tr(\dot{\epsilon})) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{T_t}{1 - \sin \varphi} (tr(\dot{\epsilon}) - tr(\dot{\epsilon}) \sin \varphi)$ | $tr(\dot{\epsilon}) > tr(\dot{\epsilon}) \sin \varphi$ |
| | II e III | $\left(\frac{c}{\tan \varphi} - \frac{T_c}{2 \sin \varphi}\right) tr(\dot{\epsilon}) + \frac{T_c tr(\dot{\epsilon})}{2}$ | $0 \leq tr(\dot{\epsilon}) \leq tr(\dot{\epsilon}) \sin \varphi$ |

Este modelo tem semelhanças ao critério [4], com as seguintes alterações (ver Figura 2.22 e Figura 2.23):

- Aumentou-se o modo II (associado com a rotura por corte);
- Eliminou-se a trincatura à compressão e definiu-se em vez disso um trincatura ao corte, através de um corte recto horizontal a passar pela tensão de corte máxima, τ_{max} , do círculo de Mohr correspondente à rotura do ensaio de compressão simples (T_c).

O intuito deste critério foi de criar uma superfície que não fosse finita e que permitisse estados de tensão para além da trincatura à compressão (como no critério [4]), desde que a relação entre as tensões principais (σ_I e σ_{II}) não exceda duas vezes a tensão de corte máxima, τ_{max} , do círculo de Mohr a tracejado, ver Figura 2.22.

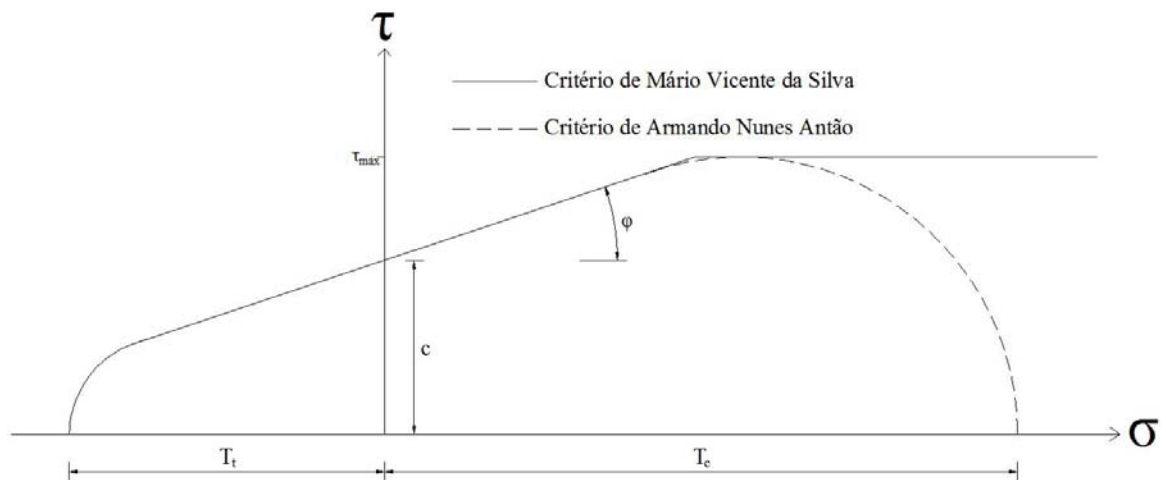


FIGURA 2.23 – Comparação do critério de Armando Nunes Antão com o critério de Mário Vicente da Silva

As alterações enunciadas anteriormente, conduzem à criação de um vértice, mas este vértice é de pouca relevância, porque o ângulo entre o modo II e III é muito grande podendo variar entre 130° (para $\phi=50^\circ$) e 170° (para $\phi=10^\circ$), logo o círculo de Mohr crítico é quase coincidente com o vértice criado.

Aparentemente a utilização do critério de Mário Vicente da Silva em condições de deformação plana poderá fornecer melhores resultados que o critério de Armando Nunes Antão se tivermos em consideração que a rotura ocorrerá por corte e não por limite de compressão.

Capítulo 3

Ferramenta de cálculo

Neste capítulo apresenta-se a formulação final da ferramenta de cálculo que serve como base ao presente documento, SUBLIM3d (para compreender a evolução das formulações do SUBLIM3d até chegar à formulação final basta consultar [1]).

A formulação do SUBLIM3d resolve o problema através de programação matemática não-linear, utilizando o modelo de elementos finitos misto que considera uma aproximação global para o campo das velocidades e uma aproximação local ao nível de cada elemento para a taxa das deformações. Recorrendo a um método iterativo baseado no algoritmo de Uzawa, procede-se à determinação da solução óptima através da resolução sucessiva do problema de minimização, utilizando alternada e independentemente as variáveis de decisão relativas às aproximações utilizadas para os diferentes campos. Assim, a estratégia delineada por esta ferramenta de cálculo permite que a não-linearidade do problema possa ser tratada de um modo simples e expedito, já que se afectam apenas as grandezas locais dos elementos.

3.1 Formulação numérica

Como ponto de partida, escalam-se todos os mecanismos plásticos, através da imposição da condição (3.1) que obriga a que o trabalho efectuado pelo carregamento variável seja unitário:

$$W_\lambda(\dot{u}) = 1 \quad (3.1)$$

Esta medida conduz à reformulação do problema de optimização, permitindo que a solução do novo problema corresponda ao parâmetro da carga de colapso óptimo. Deste modo, evita-se a necessidade de testar diversos parâmetros de carga, resultantes de um algoritmo auxiliar de pesquisa da carga de colapso.

Para qualquer mecanismo cinematicamente admissível, pode-se estabelecer para a expressão do multiplicador a equação (3.2), através da introdução da equação (3.1) num corolário do teorema cinemático (substituindo (2.34) em (2.38)):

$$\lambda W_\lambda + \tilde{W} \geq W_D \stackrel{(3.1)}{\implies} \lambda \geq W_D - \tilde{W} \quad (3.2)$$

assim, a procura do mínimo valor da região superior do multiplicador da carga de cedência, λ_c , pode ser delineada através da resolução de um único e simples problema de programação matemático de minimização,

$$\lambda_c = \text{Min} \left(\lambda(\dot{u}, \dot{\varepsilon}) = W_D(\dot{\varepsilon}) - \tilde{W}(\dot{u}) \right) \quad (3.3)$$

que se encontra sujeito às condições (2.24), (2.33), (3.1) e

$$\dot{\varepsilon} \in C_c \quad (3.4)$$

que obrigam a obedecer às condições de admissibilidade cinemática.

Note-se que o termo da descontinuidade da velocidade na expressão da taxa de energia dissipada é cancelado, uma vez que ele é descartado pela presente formulação de elementos finitos.

Usando agora o método do Lagrangiano aumentado, que permite estabelecer a compatibilidade entre os campos da taxa de deformação e os campos da velocidade, pode-se reformular o problema de minimização (3.3), bastando para isso, impor-se na função objectivo:

- As condições de compatibilidade (2.33), aplicando os multiplicadores de Lagrange, μ , e reforçando a convergência através de um termo de penalização quadrático;
- A normalização definida por (3.1), usando a técnica anterior, mas neste caso sem a utilização do termo suplementar de penalidade.

Resume-se assim a minimização a um problema com restrições explícitas afectando apenas o campo da taxa da deformação. Nesta reformulação, as restrições impostas pela condição (3.4) serão tratadas directamente durante o algoritmo da minimização do Lagrangiano aumentado. Assim, o problema (3.3) obtido pela formulação do Lagrangiano aumentado pode ser expresso:

$$\lambda_c = \text{Min} \left(L(\dot{u}, \dot{\varepsilon}, \mu, \mu_\lambda) = W_D(\dot{\varepsilon}) - \tilde{W}(\dot{u}) + \mu_\lambda(1 - W_\lambda) + \int_\Omega \mu : (B\dot{u} - \dot{\varepsilon}) d\Omega + \frac{r}{2} \int_\Omega |B\dot{u} - \dot{\varepsilon}|^2 d\Omega \right) \quad (3.5)$$

sujeito apenas a (3.4). μ_λ e μ são vectores colectores dos multiplicadores de Lagrange e r é um parâmetro de penalidade (escalar positivo). De um ponto de vista físico os multiplicadores de Lagrange representam a grandeza dual do campo da taxa de deformação, isto é, o campo das tensões.

Introduzindo agora duas aproximações independentes e simultâneas para a velocidade e para os campos da taxa de deformação plástica,

$$\dot{u}_i(x, y, z) = \{v_x, v_y, v_z\}_i^T = N_i(x, y, z)d_i \quad \text{em } \Omega_i \quad (3.6)$$

Onde no que diz respeito ao elemento finito i , a matriz N_i reúne as funções de aproximação da forma nodal convencional e o vector d_i o peso associado, dado pelos valores de velocidade nodal dos elementos finitos. Assim sendo, as condições de fronteira cinemáticas (2.24) e a compatibilidade entre elementos são garantidas.

$$\dot{\varepsilon}_i(x, y, z) = \{\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z, 2\dot{\varepsilon}_{xy}, 2\dot{\varepsilon}_{yz}, 2\dot{\varepsilon}_{xz}\}_i^T = e_i \quad \text{em } \Omega_i \quad (3.7)$$

Onde o vector e_i junta os valores aproximados das componentes da taxa de deformação plástica que são assumidos como constantes.

na cedência da função Lagrangiana obtém-se,

$$\begin{aligned} L(d, e, \mu, \mu_\lambda) = & \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} D(e_i) d\Omega - \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} \tilde{b}^T N_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma_i}} \tilde{t}^T N_i d\Gamma \right) d_i + \mu_\lambda - \\ & \mu_\lambda \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} b^T N_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma_i}} t^T N_i d\Gamma \right) d_i + \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \mu_i^T A_0(BN_i) d\Omega d_i - \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} \mu_i^T A_0 e_i d\Omega + \\ & \frac{r}{2} \sum_{i=1}^{n_E} d_i^T \int_{\Omega_i} (BN_i)^T A_0(BN_i) d\Omega d_i - r \sum_{i=1}^{n_E} d_i^T \int_{\Omega_i} (BN_i)^T A_0 e_i d\Omega + \frac{r}{2} \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} e_i^T A_0 e_i d\Omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde n_E representa o número da malha dos elementos, μ corresponde ao vector dos multiplicadores de Lagrange,

$$\mu_i = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \\ 2\mu_{xy} \\ 2\mu_{yz} \\ 2\mu_{xz} \end{pmatrix}_i \quad (3.9)$$

e a matriz A_0 assume a seguinte forma,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De seguida apresenta-se de forma sintética o modo de incorporar os elementos de junta e os elementos de corpo rígido na implementação da presente formulação.

3.1.1 Modelação das descontinuidades (Elementos de junta)

Na teoria da análise limite o campo das velocidades associado aos mecanismos de colapso não é necessariamente contínuo. Assim foram estudadas duas estratégias que visam a introdução no modelo proposto de descontinuidades no campo das velocidades, correspondentes a fortes gradientes na taxa de deformação plástica.

A primeira estratégia corresponde na introdução de elementos degenerados. Para se permitir a formação das descontinuidades, deve-se inserir na malha de elementos finitos um trecho de elementos degenerados, com espessura nula, entre os elementos regulares adjacentes. A principal característica destes elementos degenerados é o facto que dois dos nós do mesmo elemento colapsarem e partilharem assim a mesma coordenada, ver Figura 3.1.

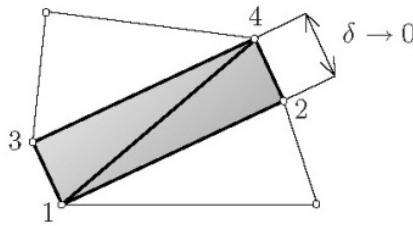


FIGURA 3.1 – Interface de dois elementos 2D formado por elementos degenerados [1]

Para assegurar a consistência do modelo, é necessário modificar o parâmetro de penalidade adoptado para os elementos degenerados na malha de elementos finitos, r_p , caso contrário, os termos quadráticos da função Lagrangiana (3.8) destes elementos assumiriam o valor de infinito. Para ultrapassar este problema o parâmetro r_p deve ser obtido pela seguinte expressão,

$$r_p = r\Delta_p, \quad \Delta_p \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

onde Δ_p representa o volume do elemento degenerado, r corresponde ao parâmetro de penalidade para os elementos regulares e δ é a espessura do elemento degenerado. Esta estratégia apresenta como principal atractivo a grande facilidade de implementação, não sendo necessário efectuar praticamente nenhuma alteração ao código do modelo contínuo. Nesta estratégia deve-se ter especial cuidado, na introdução dos elementos degenerados na malha, porque a sua introdução arbitrária leva a um desnecessário aumento de graus de liberdade, portanto, estes elementos devem ser usados moderadamente e apenas em regiões delimitadas onde singularidades na solução são expectáveis.

A segunda estratégia, chamada de formulação híbrida/mista, consiste em introduzir na formulação uma terceira aproximação na fronteira dos elementos. Esta estratégia apresenta a denominação referida porque aproxima campos tanto no domínio como na fronteira (híbrida) e porque também considera duas aproximações independentes de campos distintos no domínio (mista).

Começa-se por aproximar o campo das velocidades relativas na fronteira dos elementos para Γ_{di} (i -ésima fronteira inter-elementar),

$$\hat{v}(x, y, z) = \{\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z\}_i^T = U_{\Gamma_i}(x, y, z)q_{\Gamma_i} \quad em \Gamma_{di} \quad (3.12)$$

onde a matriz U_{Γ_i} agrupa as funções de aproximação, que podem ser constantes ou lineares e o vector q_{Γ_i} contém por seu lado os pesos das respectivas funções de aproximação, cujo valor representa a velocidade relativa nodal.

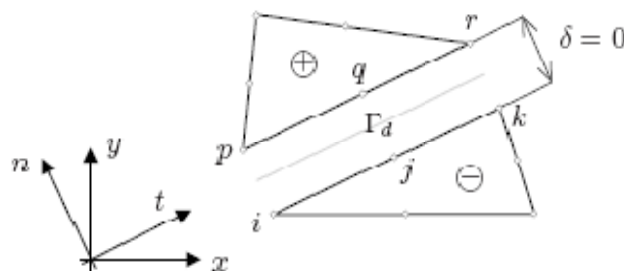


FIGURA 3.2 – Fronteira com descontinuidades entre dois elementos adjacentes [1]

Como na primeira estratégia, nas fronteiras inter-elementares com descontinuidades, os nós são partilhados pelos elementos, havendo uma redundância de nós com as mesmas coordenadas (Figura 3.2). Por último, estabelece-se a compatibilização do campo das velocidades entre dois elementos através do campo das velocidades relativas,

$$\hat{v} = \dot{u}^+ - \dot{u}^- \quad em \Gamma_d \quad (3.13)$$

onde $+$ e $-$ representam as duas regiões delimitadas pela fronteira Γ_d , sendo a sua ordem escolhida de forma aleatória (Figura 3.2).

3.1.2 Elementos de Corpo Rígido

Os elementos de corpo rígido podem ser modelados de duas formas distintas:

- Uma forma mais expedita, que consiste em modelar os elementos através da atribuição de elevadas propriedades mecânicas fictícias. Impossibilita-se assim a deformação plástica destes elementos na formação do mecanismo de colapso óptimo, por estar, necessariamente associada a dissipações incomportavelmente elevadas. Ainda por cima, no ponto de vista numérico, este procedimento é ineficiente, porque não só durante o processo de minimização local estes elementos seriam desnecessariamente processados, como também haveria uma utilização de graus de liberdade supérfluos no sistema global.
- A forma usada na presente formulação, que consiste em associar a cada corpo rígido um nó virtual localizado na origem do sistema de coordenadas global (Figura 3.3). A este nó são atribuídos seis graus de liberdade: três correspondem a velocidades (d_x, d_y, d_z) e os restantes três correspondem a velocidades angulares $(d_{\theta_x}, d_{\theta_y}, d_{\theta_z})$.

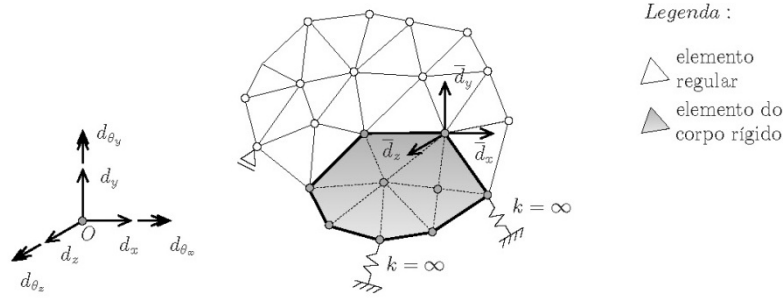


FIGURA 3.3 – Graus de liberdade de um corpo rígido [1]

Pode-se estabelecer uma relação unívoca entre estes graus de liberdade, d , e os graus de liberdade de velocidade de um nó genérico que pertença a um dos elementos que constituem o corpo rígido, \bar{d}_i ,

$$d = T_i^T \bar{d}_i \rightarrow \bar{d}_i = T_i d \quad (3.14)$$

onde T corresponde à matriz transformação e é definida por,

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i & -y_i \\ 0 & 1 & 0 & -z_i & 0 & x_i \\ 0 & 0 & 1 & y_i & -x_i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

em que x_i, y_i, z_i são as coordenadas do nó genérico i e os vectores dos graus de liberdade são representados por,

$$\bar{d}_i = \begin{Bmatrix} \bar{d}_x \\ \bar{d}_y \\ \bar{d}_z \end{Bmatrix}_i, \quad d = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ d_{\theta_x} \\ d_{\theta_y} \\ d_{\theta_z} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Esta relação permite eliminar todos os graus de liberdade associados a nós do corpo rígido do sistema governativo global, substituindo-os, alternativamente, pelas variáveis do nó virtual. Para tal, é necessário que, antes de se realizar a operação de espalhamento das contribuições elementares, se proceda à transformação das grandezas calculadas para os graus de liberdade locais dos nós, \bar{d} . Este procedimento pode representar uma redução considerável nos graus de liberdade do corpo.

Estes elementos, na formulação numérica do SUBLIM3d, são ignorados no processo de cálculo (na montagem da matriz do sistema governativo e na minimização local) e não necessitam de se associar multiplicadores de Lagrange, abreviando assim o processo de actualização dos mesmos.

3.2 Algoritmo de programação matemático

No presente tópico, procede-se a uma apresentação detalhada do algoritmo de programação matemático utilizado pelo SUBLIM3d para simular o comportamento estrutural. Neste caso, para se atingir o campo cinemático óptimo do Lagrangiano aumentado (3.8) aplicou-se o algoritmo de minimização de Uzawa que exhibe uma convergência robusta e permite diminuir a complexidade dos aspectos não lineares do problema. Este algoritmo passa pela obtenção a cada iteração, k , de uma boa aproximação à minimização da função Lagrangiana (associada ao valor corrente dos multiplicadores, μ^k), ver Figura 3.4. Seguidamente no fim de cada iteração, realiza-se a actualização dos multiplicadores recorrendo à discrepância entre os campos da taxa de deformação calculado a partir de (3.6) e o fornecido por (3.7),

$$\mu_i^{k+1} = \mu_i^k + r(BN_i d_i^k - e_i^k) \quad (3.17)$$

A tarefa de obter o exacto minimizador do Lagrangiano, para a iteração k , não é trivial e exige um custo computacional significativo. Alternativamente, optou-se por obter uma boa estimativa do minimizador do Lagrangiano, realizado através da minimização sucessiva da função objectivo, isto é, primeiro minimiza-se a função objectivo em relação aos deslocamentos dos graus de liberdade (d.o.f.), d , e ao multiplicador de Lagrange, μ_λ , por outro lado, a segunda minimização realiza-se em relação à taxa de deformação dos d.o.f., e , assim estas duas minimizações independentes são chamadas de *FASE 1* e *FASE 2*, respectivamente. A *FASE 1*, também chamada de minimização global é representada por um sistema linear de equações de fácil resolução e encarrega-se da contribuição simultânea de todos os elementos da malha. Por outro lado, a *FASE 2*, trabalha com a não linearidade do problema e é executada ao nível do elemento, por esta razão também é designada de minimização local (Figura 3.4). O detalhe necessário para executar estas duas minimizações será apresentado nas subsecções seguintes.

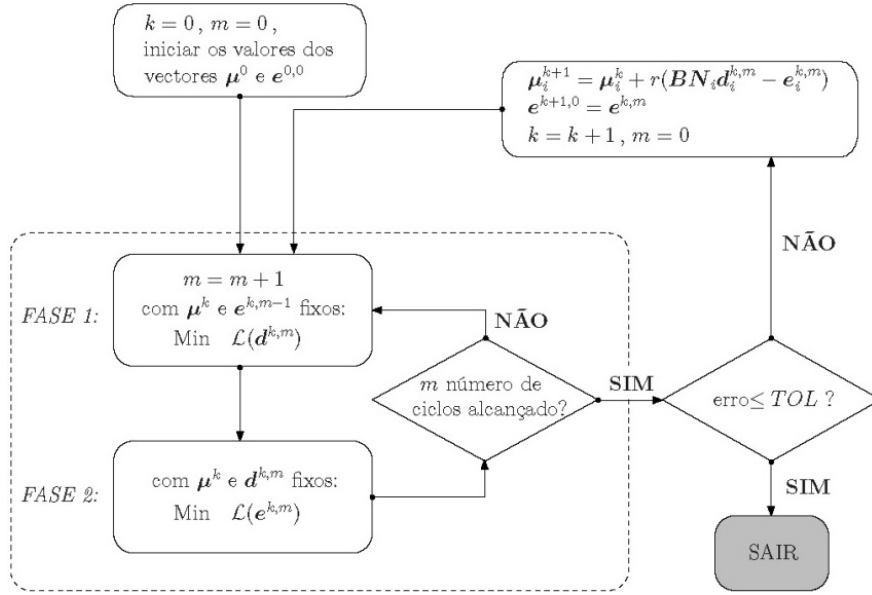


FIGURA 3.4 – Implementação do algoritmo de minimização de Uzawa [1]

Como nota, apresenta-se de seguida algumas características de dois parâmetros muito importantes: número de ciclos de relaxação interior, m , e valor inicial do parâmetro de penalidade, r_0 . O valor do parâmetro m , ver Figura 3.4, pode ser escolhido livremente, mas deve ter sempre em consideração as experiências numéricas conduzidas pelos autores do artigo [24]. Por outro lado, o parâmetro r_0 apresenta um papel importante no ritmo de convergência do método iterativo de Uzawa. O seu valor não pode ser muito elevado, o que origina uma evolução muito rápida no processo iterativo podendo tornar-se num problema mal formulado e pôr assim em risco a convergência (convergindo para um valor da região superior menos preciso do que aquele que o método é capaz de produzir), nem muito reduzido, que provoca uma evolução muito lenta no processo iterativo podendo assim levar a um significativo decréscimo da taxa de convergência.

3.2.1 Minimização global (FASE 1)

O problema de minimização presente na *FASE 1* do algoritmo de Uzawa é denominado de minimização global, porque corresponde a uma minimização em relação ao campo de velocidades, que envolve simultaneamente a contribuição de todos os elementos finitos que definem o domínio. Assim, esta minimização tem como objectivo a procura do ponto estacionário que minimiza a função Lagrangiana aumentada em relação às variáveis d e μ_λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(d, e, \mu, \mu_\lambda)}{\partial d} = 0 \\ \frac{\partial L(d, e, \mu, \mu_\lambda)}{\partial \mu_\lambda} = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

resultando num sistema linear de equações que se resolve para cada iteração,

$$\begin{cases} r[A]\{d\}^{k,m} - \{F\}\mu_\lambda^{k,m} = \{\tilde{F}\} - \{\Lambda\}^k + \{L\}^{k,m-1} \\ \{F\}^T\{d\}^{k,m} = 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

onde,

$$[A] = \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} (BN_i)^T A_0 (BN_i) d\Omega \quad (3.20)$$

$$\{F\} = \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} b^T N_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma_i}} t^T N_i d\Gamma \right) \quad (3.21)$$

$$\{\tilde{F}\} = \sum_{i=1}^{n_E} \left(\int_{\Omega_i} \tilde{b}^T N_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma_i}} \tilde{t}^T N_i d\Gamma \right) \quad (3.22)$$

$$\{\Lambda\}^k = \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} (BN_i)^T A_0 (\mu_i)^k d\Omega \quad (3.23)$$

$$\{L\}^{k,m-1} = r \sum_{i=1}^{n_E} \int_{\Omega_i} (BN_i)^T A_0 (e_i)^{k,m-1} d\Omega \quad (3.24)$$

sendo os vectores e_i e μ_i constantes durante a minimização.

A matriz do sistema governativo, A , mantêm-se inalterada durante todo o processo iterativo, logo todas as modificações afectam apenas os restantes termos da primeira equação do sistema linear de equações apresentado anteriormente. Assim durante todo o processo iterativo, apenas é necessária uma única factorização da matriz, para o cálculo dos termos. Resolvendo a primeira equação do sistema linear de equações (3.19) em ordem a $\{d\}^{k,m}$, sobressai a seguinte condição,

$$\{d\}^{k,m} = \frac{1}{r} [A]^{-1} (\{\tilde{F}\} - \{\Lambda\}^k + \{L\}^{k,m-1} + \{F\} \mu_\lambda^{k,m}) \quad (3.25)$$

multiplicando agora de ambos os lados por $\{F\}^T$, introduzindo depois a segunda equação do sistema linear de equações (3.19) e, por último, resolvendo em ordem a μ_λ obtêm-se:

$$\mu_\lambda^{k,m} = \frac{r - \{F\}^T \{D\}^{k,m}}{\beta} \quad (3.26)$$

onde

$$\{D\}^{k,m} = [A]^{-1} (\{\tilde{F}\} - \{\Lambda\}^k + \{L\}^{k,m-1}) \quad (3.27)$$

$$\beta = \{F\}^T \{H\} \quad (3.28)$$

sendo,

$$\{H\} = [A]^{-1} \{F\} \quad (3.29)$$

Para eliminar a variável μ_λ , basta então introduzir a equação (3.26) em (3.25), obtendo-se assim a expressão calculável das velocidades nodais, d :

$$\{d\}^{k,m} = \frac{1}{r} \left(\{D\}^{k,m} + \{H\} \frac{r - \{F\}^T \{D\}^{k,m}}{\beta} \right) \quad (3.30)$$

Observando atentamente a equação principal da minimização global (3.30) vê-se que as definições que se apresentam nesta dissertação em nada a influenciam, logo, na presente fase não se procedeu a qualquer alteração/acrescento.

3.2.2 Minimização local (FASE 2)

O problema de minimização presente na FASE 2 do algoritmo de Uzawa é denominado de minimização local porque corresponde a uma minimização em relação ao campo da taxa de deformações, que é restrita a cada elemento. Esta fase pode ser realizada elemento a elemento de modo independente. Sem entrar em qualquer comportamento específico do material, começa-se por eliminar todos os termos afectados apenas pelas variáveis desconhecidas d e μ , que nesta etapa são fixos. Depois pode-se eliminar o domínio de integração, porque se assume como constante a aproximação executada ao campo da taxa de deformação (3.7) para todos os elementos. Tomando em consideração as hipóteses anteriores, que em nada alteram o ponto óptimo, o problema otimizado local pode ser reformulado para cada elemento finito por:

$$\text{Min}_{e_i \in C_c} L_i^*(e_i) = D(e_i) - s^T A_0 e_i + \frac{r}{2} e_i^T A_0 e_i \quad (3.31)$$

onde,

$$s_i = \{s_x, s_y, s_z, 2s_{xy}, 2s_{yz}, 2s_{xz}\}_i^T = \mu_i + rBN_i d_i \quad (3.32)$$

que contem as componentes do tensor S_i ,

$$S_i = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_z \end{bmatrix}_i \quad (3.33)$$

Por fim, para se obter uma redução no espaço das variáveis de decisão e consequentemente na complexidade do problema de minimização, converte-se-o num problema de minimização equivalente formulado no espaço das deformações principais,

$$\text{Min}_{\tilde{e}_i \in C_c} L_i^*(\tilde{e}_i) = D(\tilde{e}_i) - \tilde{s}_i^T \tilde{e}_i + \frac{r}{2} \tilde{e}_i^T \tilde{e}_i \quad (3.34)$$

onde o vector \tilde{e}_i guarda as componentes principais da aproximação do tensor da taxa de deformação do domínio,

$$\tilde{e}_i = \{e_I, e_{II}, e_{III}\}_i^T \quad (3.35)$$

e o vector \tilde{s}_i reúne os valores próprios do tensor S_i , que são ordenados de forma decrescente ($s_I \geq s_{II} \geq s_{III}$),

$$\tilde{s}_i = \{s_I, s_{II}, s_{III}\}_i^T \quad (3.36)$$

A obtenção das componentes do vector \tilde{e}_i , (3.35), realiza-se através da decomposição da matriz ortogonal,

$$\begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_z \end{bmatrix}_i = Y_i \begin{bmatrix} e_I & 0 & 0 \\ 0 & e_{II} & 0 \\ 0 & 0 & e_{III} \end{bmatrix}_i Y_i^T \quad (3.37)$$

sendo a matriz Y_i formada pelos valores próprios normalizados da matriz S_i e que se encontra organizada da mesma forma que os vectores próprios.

Como o primeiro e o último termo da equação (3.34) apresentam um comportamento isotrópico e no termo intermédio cada componente da taxa de deformação é afectada directamente pelos coeficientes do vector \tilde{s}_i , logo conclui-se que a solução óptima partilha necessariamente a mesma característica que o vector $\tilde{s}_i (s_I \geq s_{II} \geq s_{III})$,

$$e_I \geq e_{II} \geq e_{III} \quad (3.38)$$

Como simplificação, nas expressões deste tópico não se incluem os índices de iteração (k, m).

As formulações adoptadas para resolver o problema de minimização (3.34), para os diferentes critérios de cedência no caso de deformação plana, que corresponde a um caso particular do problema 3D, bastando para isso impor,

$$e_{III} = 0 \wedge s_{III} = 0 \quad (3.39)$$

são explicados seguidamente de forma detalhada. Note-se que na ferramenta SUBLIM3d o critério Mohr – Coulomb já se encontra implementado, pretendendo-se nesta dissertação implementar o critério de Armando Nunes Antão e de Mário Vicente da Silva.

3.2.2.1 Critério de Mohr – Coulomb [25]

Tendo como base a função da taxa de dissipação de energia plástica para o critério de Mohr – Coulomb, Tabela 2.1, pode-se especificar o problema de minimização local (3.34) em,

$$L^*(e_I, e_{II}) = \frac{c}{\tan \varphi} (e_I + e_{II}) - s_I e_I - s_{II} e_{II} + \frac{r}{2} (e_I^2 + e_{II}^2) \quad (3.40)$$

que corresponde a uma função objectivo nodal quadrática em \mathbb{R}^2 , sujeita em cada ponto a restrições de desigualdade lineares.

A estratégia adoptada consiste primeiramente em impor a condição, que permite obter o mínimo da função objectivo,

$$\nabla L^*(e_I, e_{II}) = 0 \quad (3.41)$$

à equação (3.40) independentemente das restrições. A solução sem restrições para qual a função objectivo atinge o seu valor mínimo, \tilde{e}_u , é dada por:

$$\tilde{e}_u = \{o_1, o_2\}^T = \frac{1}{r} \left\{ -\frac{c}{\tan \varphi} + s_I, -\frac{c}{\tan \varphi} + s_{II} \right\}^T \quad (3.42)$$

Em seguida, a solução anterior é testada verificando se ela pertence ao domínio possível, $\tilde{e}_u \in C_c$, ver Tabela 2.1. Em caso afirmativo, o ponto óptimo do problema de minimização local foi alcançado, caso contrário, a solução consiste no ponto mais próximo do ponto óptimo sem restrições (3.42), localizado na superfície do domínio possível [26],

$$tr(\dot{\epsilon}) = (|\dot{\epsilon}_I| + |\dot{\epsilon}_{II}|) \sin \varphi \quad (3.43)$$

como se pode constatar pela observação da função objectivo (3.40) os coeficientes que afectam os termos quadráticos são os mesmos ($r/2$), portanto, a equipotencialidade da superfície da função define superfícies esféricas centradas no ponto óptimo sem restrições, \tilde{e}_u . Como o domínio possível

é convexo, o ponto óptimo é necessariamente o ponto do domínio possível mais próximo do centro. De acordo com a restrição (3.38), apenas os dois pontos seguintes são candidatos admissíveis:

$$\tilde{e}^1 = \{0,0\}^T \quad (3.44)$$

$$\tilde{e}^2 = \begin{cases} o_1 - (1 - \sin \varphi) \frac{(1 - \sin \varphi)o_1 + (1 + \sin \varphi)o_2}{(1 - \sin \varphi)^2 + (1 + \sin \varphi)^2} \\ o_2 - (1 + \sin \varphi) \frac{(1 - \sin \varphi)o_1 + (1 + \sin \varphi)o_2}{(1 - \sin \varphi)^2 + (1 + \sin \varphi)^2} \end{cases} \quad (3.45)$$

Por fim, a escolha da solução óptima resume-se nos seguintes passos:

- I. Confirmar se os pontos admissíveis pertencem ao espaço auxiliar que confina a taxa do tensor da deformação, C_c , ver Tabela 2.1;
- II. Seleccionar entre todos os pontos que verifiquem a condição anterior, o que minimiza a função objectivo (3.40).

Uma discussão mais detalhada sobre esta minimização pode ser encontrada em [26].

3.2.2.2 Critério de Armando Nunes Antão

Tendo como base a função da taxa de dissipação de energia plástica para o critério de Armando Nunes Antão[4], Tabela 2.2, pode-se especificar o problema de minimização local (3.34):

Modo I:

$$L^*(e_I, e_{II}) = c(|e_I| + |e_{II}| - e_I - e_{II}) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{T_t}{1 - \sin \varphi} (e_I + e_{II} - (|e_I| + |e_{II}|) \sin \varphi) - s_I e_I - s_{II} e_{II} + \frac{r}{2} (e_I^2 + e_{II}^2) \quad (3.46)$$

sendo a regra de normalidade traduzida pela restrição,

$$e_I + e_{II} > (|e_I| + |e_{II}|) \sin \varphi \quad (3.47)$$

Modo II e III:

$$L^*(e_I, e_{II}) = H(e_I + e_{II}) - \frac{(T_c + H)}{1 + \sin \varphi} (e_I + e_{II} - (|e_I| + |e_{II}|) \sin \varphi) - s_I e_I - s_{II} e_{II} + \frac{r}{2} (e_I^2 + e_{II}^2) \quad (3.48)$$

onde a constante H é obtida, como já foi dito anteriormente, pela equação (2.45). A regra da normalidade deste modo é traduzida pela seguinte restrição,

$$e_I + e_{II} \leq (|e_I| + |e_{II}|) \sin \varphi \quad (3.49)$$

A função objectivo, neste caso, corresponde a uma função por ramos, onde em cada ramo se define uma função nodal quadrática, sujeita em cada ponto a restrições de desigualdade lineares.

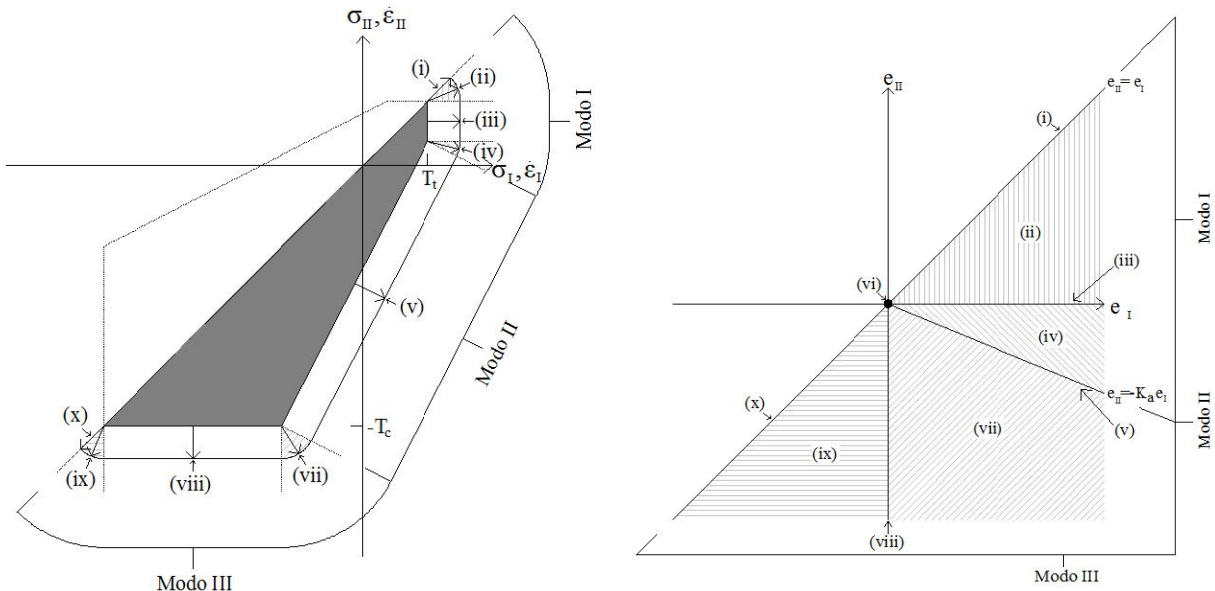


FIGURA 3.5 – Zonas que definem o espaço auxiliar, C_c , no critério de Armando Nunes Antão

Começando por contrapor a ordenação (3.38) com as restrições (3.47) e (3.49), restringem-se as situações a considerar (ver Figura 3.5): (i) $e_{II} = e_I \wedge e_{II} > 0$; (ii) $e_{II} < e_I \wedge e_{II} > 0$; (iii) $e_I > 0 \wedge e_{II} = 0$; (iv) $-K_a e_I < e_{II} < 0$; (v) $e_{II} = -K_a e_I \wedge e_I > 0$; (vi) $e_{II} = e_I = 0$; (vii) $e_{II} < -K_a e_I \wedge e_I > 0$; (viii) $e_{II} < 0 \wedge e_I = 0$; (ix) $e_{II} < e_I \wedge e_I < 0$ e (x) $e_{II} = e_I \wedge e_I < 0$. Associadas a cada uma das 10 situações anteriores são encontradas soluções que minimizam a função objectivo, através da equação (3.41):

$$\tilde{e}^1 = \frac{s_I + s_{II} - 2T_t}{2r} \{1, 1\}^T \quad (3.50)$$

$$\tilde{e}^2 = \frac{1}{r} \{s_I - T_t, s_{II} - T_t\}^T \quad (3.51)$$

$$\tilde{e}^3 = \left\{ \frac{s_I - T_t}{r}, 0 \right\}^T \quad (3.52)$$

$$\tilde{e}^4 = \frac{1}{r} \left\{ s_I - T_t, 2c \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - T_t K_p + s_{II} \right\}^T \quad (3.53)$$

$$\tilde{e}^5 = \frac{K_a(H - s_{II}) + s_I - H}{r(1 + K_a^2)} \{1, -K_a\}^T \quad (3.54)$$

$$\tilde{e}^6 = \{0, 0\}^T \quad (3.55)$$

$$\tilde{e}^7 = \frac{1}{r} \{K_a(T_c + H) + s_I - H, s_{II} + T_c\}^T \quad (3.56)$$

$$\tilde{e}^8 = \left\{ 0, \frac{s_{II} + T_c}{r} \right\}^T \quad (3.57)$$

$$\tilde{e}^9 = \frac{1}{r} \{s_I + T_c, s_{II} + T_c\}^T \quad (3.58)$$

$$\tilde{e}^{10} = \frac{s_I + s_{II} + 2T_c}{2r} \{1, 1\}^T \quad (3.59)$$

onde K_a é designado por coeficiente de impulso activo, sendo dado por:

$$K_a = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad (3.60)$$

e por seu lado, K_p é designado por coeficiente de impulso passivo, sendo dado por:

$$K_p = K_a^{-1} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (3.61)$$

Dos candidatos apresentados são rejeitados liminarmente aqueles que não satisfazem a regra da normalidade (Modo I: equação (3.47); Modo II e III: equação (3.49)). Os restantes são testados, escolhendo-se, eventualmente, aquele que produz o menor valor para a função objectivo definida por ramos (Modo I: equação (3.46); Modo II e III: equação (3.48)).

Como nota, explica-se o processo de definição da estratégia de minimização escolhida para este critério: Inicialmente tinha-se optado por uma estratégia semelhante à apresentada no critério de Mohr-Coulomb (capítulo 3.2.2.1), mas a solução obtida não correspondia à esperada. Depois de vários testes realizados chegou-se à conclusão que este facto se devia à perda de precisão com a execução das projecções, sendo mais relevante, nas situações próximas das zonas de transição (zonas (i), (iii), (v), (viii) e (x)), conduzindo assim à redução da qualidade dos candidatos a solução. De modo a ultrapassar esta falha, escolheu-se a estratégia apresentada neste tópico, devido a definir explicitamente todos os candidatos a solução.

3.2.2.3 Critério de Mário Vicente da Silva

Tendo como base a função da taxa de dissipação de energia plástica para o critério de Mário Vicente da Silva[5], Tabela 2.3, pode-se especificar o problema de minimização local (3.34):

Modo I:

$$L^*(e_I, e_{II}) = c(|e_I| + |e_{II}| - e_I - e_{II}) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{T_t}{1 - \sin \varphi} (e_I + e_{II} - (|e_I| + |e_{II}|) \sin \varphi) - s_I e_I - s_{II} e_{II} + \frac{r}{2} (e_I^2 + e_{II}^2) \quad (3.62)$$

sendo a regra de normalidade traduzida pela restrição,

$$e_I + e_{II} > (|e_I| + |e_{II}|) \sin \varphi \quad (3.63)$$

Modo II e III:

$$L^*(e_I, e_{II}) = \left(\frac{c}{\tan \varphi} - \frac{T_c}{2 \sin \varphi}\right) (e_I + e_{II}) + \frac{T_c}{2} (|e_I| + |e_{II}|) - s_I e_I - s_{II} e_{II} + \frac{r}{2} (e_I^2 + e_{II}^2) \quad (3.64)$$

sendo a regra de normalidade traduzida pela restrição,

$$\begin{cases} e_I + e_{II} \geq 0 \\ e_I + e_{II} \leq (|e_I| + |e_{II}|) \sin \varphi \end{cases} \quad (3.65)$$

A função objectivo corresponde a uma função por ramos, onde em cada ramo se define uma função nodal quadrática, sujeita em cada ponto a restrições de desigualdade lineares.

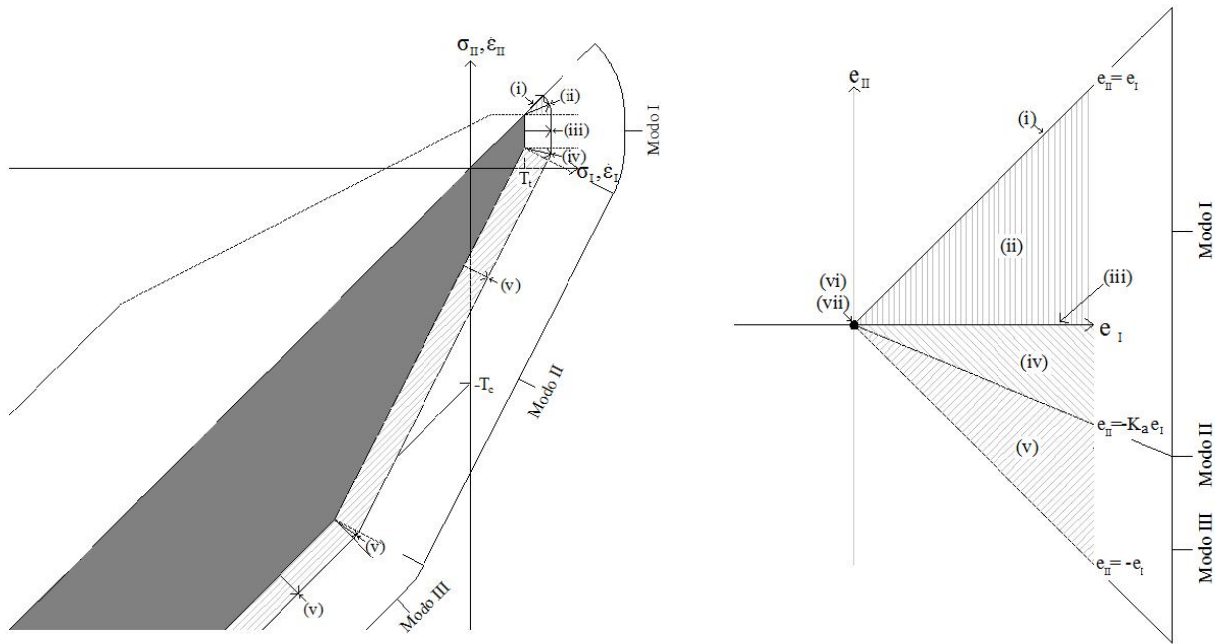


FIGURA 3.6 – Zonas que definem o espaço auxiliar, C_c , no critério de Mário Vicente da Silva

Como se pode observar, o primeiro ramo da função objectivo (3.62) bem como a sua restrição (3.63) é semelhante ao primeiro ramo da função objectivo do critério de Armando Nunes Antão, equação (3.46) e restrição (3.47), por isso para o modo I (zonas (i), (ii), (iii) e (iv)) utilizou-se o mesmo raciocínio apresentado no critério de Armando Nunes Antão (ver Figura 3.6).

Pelo contrário, para o Modo II e III optou-se por uma estratégia semelhante à do critério de Mohr-Coulomb: Começando por contrapor a ordenação (3.38) com os quadrantes do gráfico, formado pelas componentes principais da aproximação do tensor da taxa de deformação, restringem-se as situações a considerar: (v) $e_I \geq 0 \wedge e_{II} \leq 0$; (vi) $e_I \geq 0 \wedge e_{II} \geq 0$ e (vii) $e_I \leq 0 \wedge e_{II} \leq 0$. Para cada uma das 3 situações anteriores, simplifica-se a equação (3.64) e impõe-se a restrição provocada pela regra da normalidade (3.65):

- Para a situação (v) o problema de minimização local simplificado fica,

$$L^*(e_I, e_{II}) = \left(\frac{c}{\tan \varphi} - \frac{T_c}{2 \sin \varphi} \right) (e_I + e_{II}) + \frac{T_c}{2} (e_I - e_{II}) - s_I e_I - s_{II} e_{II} + \frac{r}{2} (e_I^2 + e_{II}^2) \quad (3.66)$$

ficando esta zona limitada por (ver Figura 3.6),

$$\begin{cases} e_{II} \geq -e_I \\ e_{II} \leq -e_I K_a \end{cases} \quad (3.67)$$

- Para a situação (vi), o problema de minimização local torna-se num problema com uma única solução (ver Figura 3.6),

$$\bar{e}^6 = \{0, 0\}^T \quad (3.68)$$

devido a ser o único ponto que verifica a restrição provocada pela regra da normalidade,

$$\begin{cases} e_{II} \geq -e_I \\ e_I + e_{II} \leq (e_I + e_{II}) \sin \varphi \end{cases} \quad (3.69)$$

- Para a situação (vii), o problema de minimização local também se torna num problema com uma única solução (ver Figura 3.6),

$$\tilde{e}^7 = \{0,0\}^T \quad (3.70)$$

devido a ser o único ponto que verifica a restrição provocada pela regra da normalidade,

$$\begin{cases} e_{II} \geq -e_I \\ -(e_I + e_{II}) \geq (e_I + e_{II}) \sin \varphi \end{cases} \quad (3.71)$$

Debruçando agora sobre a situação (v), que falta resolver, impõe-se a condição que permite obter o mínimo da função objectivo (equação (3.41) na equação (3.66)) independentemente das restrições (3.67), logo a solução sem restrições para a qual nesta zona a função objectivo atinge o seu valor mínimo, \tilde{e}_u , é dada por,

$$\tilde{e}_u = \{o_1, o_2\}^T = \frac{1}{r} \left\{ -\frac{c}{\tan \varphi} - \frac{T_c}{2} \left(1 - \frac{1}{\sin \varphi} \right) + s_I, -\frac{c}{\tan \varphi} + \frac{T_c}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \varphi} \right) + s_{II} \right\}^T \quad (3.72)$$

Em seguida, a solução anterior é testada verificando se ela pertence ao domínio possível, equação (3.67). Em caso afirmativo, o ponto óptimo do problema de minimização local foi alcançado, \tilde{e}^5 , caso contrário, a solução consiste no ponto mais próximo do ponto óptimo sem restrições (3.72), localizado na superfície do domínio possível,

$$\begin{cases} e_{II} = -e_I \\ e_{II} = -e_I K_a \end{cases} \quad (3.73)$$

Como se pode constatar pela observação da função objectivo (3.66) os coeficientes que afectam os termos quadráticos são os mesmos ($r/2$), portanto, a equipotencialidade da superfície da função define superfícies esféricas centradas no ponto óptimo sem restrições, \tilde{e}_u . Como o domínio possível é convexo, o ponto óptimo é necessariamente o ponto do domínio possível mais próximo do centro. De acordo com a restrição (3.38), apenas os três pontos seguintes são candidatos admissíveis:

$$\tilde{e}^8 = \frac{-o_2 + o_1}{2} \{1, -1\}^T \quad (3.74)$$

$$\tilde{e}^9 = \{0,0\}^T \quad (3.75)$$

$$\tilde{e}^{10} = \frac{-K_a o_2 + o_1}{K_a^2 + 1} \{1, -K_a\}^T \quad (3.76)$$

Por fim, a escolha da solução óptima resume-se nos seguintes passos:

- I. Confirmar se os pontos admissíveis, \tilde{e}^1 até \tilde{e}^{10} , pertencem ao espaço auxiliar que confina a taxa do tensor da deformação, C_e , ver Tabela 2.3;
- II. Seleccionar entre os pontos que verifiquem a condição anterior, o que minimiza a função objectivo (Modo I: equação (3.62); Modo II e III: equação (3.64)).

Capítulo 4

Validação

O processo de validação utilizado para cada um dos critérios propostos (Armando Nunes Antão e Mário Vicente da Silva) foi semelhante, por isso de seguida expõem-se e explicam-se os exemplos que definem o processo de validação do presente trabalho:

- I. Corpo sujeito a cargas uniformemente distribuídas normais à superfície (H e V), ver Figura 4.1, o processo de validação iniciou-se com este exemplo devido a ser o que apresenta o raciocínio de resolução mais simples, porque não só o corpo é sujeito a cargas em todas as faces, como se encontra formulado em tensões principais;

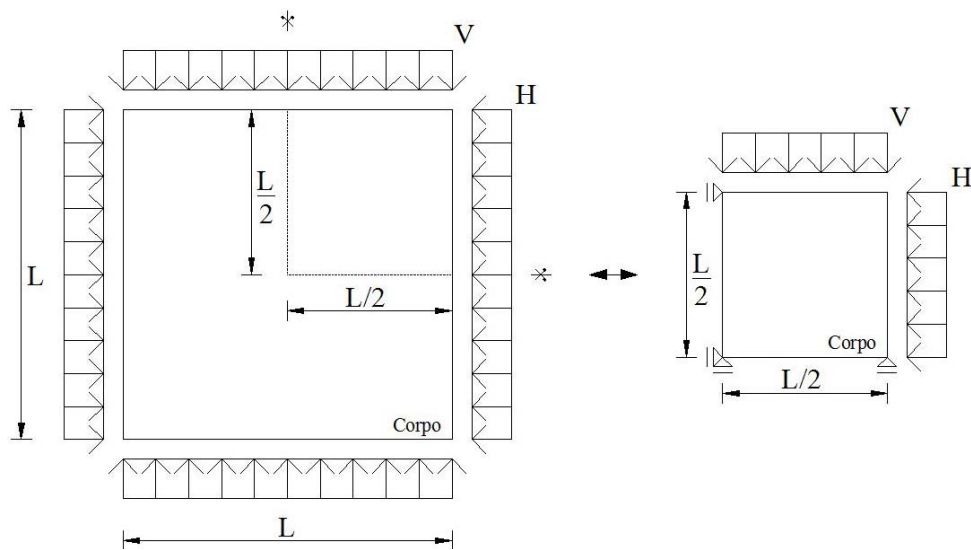


FIGURA 4.1 – Exemplo de validação nº1: Corpo sujeito a cargas uniformemente distribuídas normais à superfície (H e V)

- II. Corpo sujeito a cargas normais (H e V) e tangenciais (C) uniformemente distribuídas, ver Figura 4.2. Este exemplo foi realizado em segundo lugar porque o corpo se mantém sujeito a cargas aplicadas em todas as faces, mas desta vez, não se encontra formulado em tensões principais, o que irá dificultar a resolução do exemplo (SUBLIM3d e teórica);

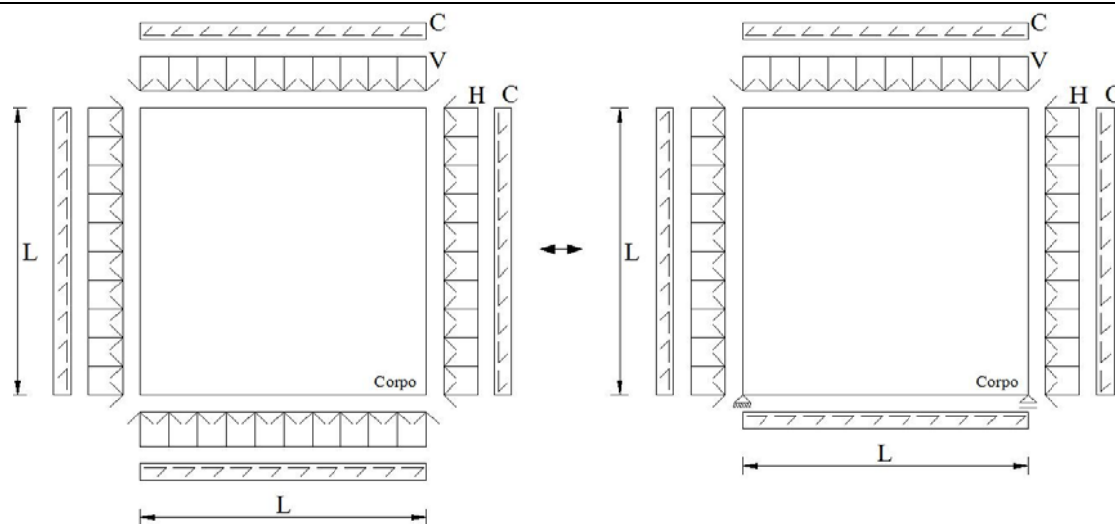


FIGURA 4.2 – Exemplo de validação nº2: Corpo sujeito a cargas normais (H e V) e tangenciais (C) uniformemente distribuídas

- III. Provete de dois tijolos com junta sujeito a cargas aplicadas no tijolo superior (V e C), ver Figura 4.3:

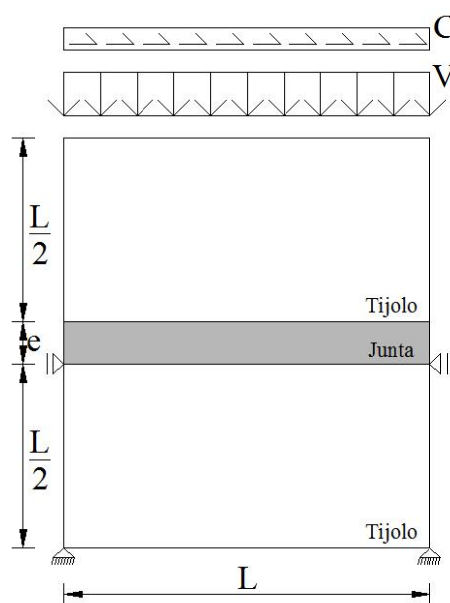


FIGURA 4.3 – Exemplo de validação nº3: Provete de dois tijolos com junta sujeito a cargas aplicadas no tijolo superior (V e C)

- Considerando em primeiro lugar, a modelação micro detalhada sem a consideração dos interfaces unidade/junta, optou-se por este tipo de estratégia para testar a interacção entre os dois materiais que constituem a alvenaria (tijolo e junta);
- Considerando neste caso para estratégia de modelação a micro simplificada, com o intuito de verificar a incorporação dos elementos de junta (capítulo 3.1.1) na alvenaria, testando assim a estratégia considerada na modelação dos exemplos de alvenaria presentes nas aplicações numéricas (ver capítulo 5);

escolheu-se terminar com este tipo de exemplo de forma a fazer a transição para o domínio dos exemplos em alvenaria.

De modo a se executar correctamente a validação, isto é, para verificar a correcta implementação dos critérios para cada uma das zonas que os constituem (Critério de Armando Nunes Antão: capítulo 3.2.2.2, Critério de Mário Vicente da Silva: capítulo 3.2.2.3), variou-se tanto o sentido e a intensidade das cargas aplicadas, como a escolha da carga variável, para cada um dos exemplos atrás enunciados.

De seguida para cada um dos critérios propostos, apresenta-se como modelo, um dos exemplos simples que definem o processo de validação, onde para cada exemplo se executa uma comparação entre os resultados obtidos pelo SUBLIM3d e os resultados analíticos reais obtidos através de cálculos simples.

4.1 Critério de Armando Nunes Antão

Para o presente critério, expõe-se como modelo o exemplo II (ver Figura 4.2), considerando que a carga variável corresponde à carga V , aplicada na face superior do corpo. De seguida apresenta-se uma breve, mas precisa, descrição dos dados necessários para a resolução do problema (SUBLIM3d e teórica):

- **DIMENSÃO DO CORPO:**
 - $L = 1$
- **CARGAS:**
 - $H = -2 \text{ N (Tracção)}$
 - $V = -1 \text{ N (Tracção)}$
 - $C = -5 \text{ N}$
- **PROPRIEDADES DO CORPO:**
 - $c = 10 \text{ MPa}$
 - $\varphi = 20^\circ$
 - $T_t = 10 \text{ MPa}$
 - $T_c = 50 \text{ MPa}$

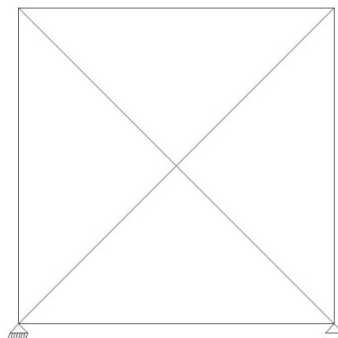


FIGURA 4.4 – Discretização do corpo

Em primeiro lugar, apresenta-se a resolução do problema através do SUBLIM3d. Esta resolução inicia-se pela geração da malha do corpo. Devido à homogeneidade de solução do exemplo, o resultado obtido por uma malha mais e menos refinada será o mesmo, por isso optou-se por uma discretização do corpo menos refinada, ver Figura 4.4. Na Tabela 4.1 encontram-se as principais características da malha utilizada, designadamente, o tipo e o número de elementos associado à malha, bem como o número de graus de liberdade globais e locais.

TABELA 4.1 – Principais características da malha

| Tipo de elementos | Número de elementos | DOF | |
|-------------------|---------------------|---------|--------|
| | | Globais | Locais |
| Linear | 4 | 7 | 8 |

O próximo passo é associar as restrições ao corpo, depois define-se o critério de cedência do corpo e por último para concluir o ficheiro de dados, aplicam-se as cargas ao corpo. Por fim, corre-se o ficheiro de dados criado, obtendo-se o seguinte resultado, ver Figura 4.5.

```
COLLAPSE LOAD MULTIPLIER: 6.8750000000059277
Max. compatibility error(%)= 1.45237131874215639E-009
nr. of total iter.= 53
Elapsed Time: 0 h 0 m 0.14 s
CPU Time: 0 h 0 m 0.19 s
```

FIGURA 4.5 – Resultado obtido pelo SUBLIM3d

Como complemento, representa-se a distribuição da dissipação plástica nos elementos e a configuração do mecanismo de colapso (Figura 4.6).

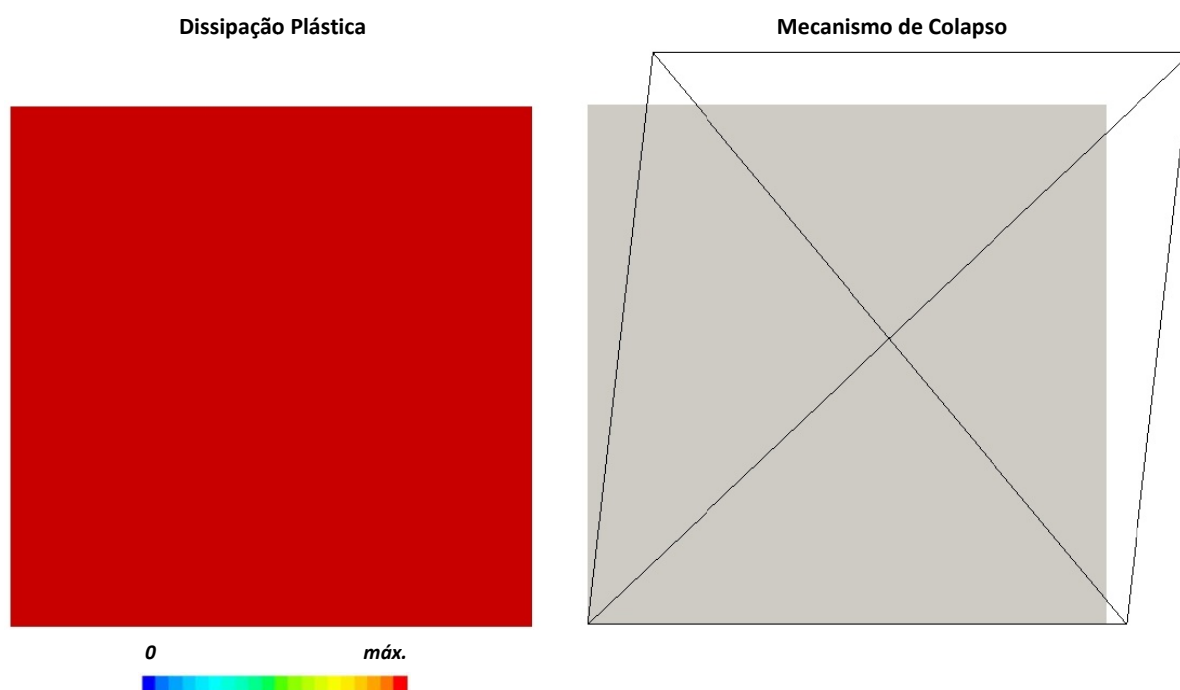


FIGURA 4.6 – Resultados complementares obtidos pelo SUBLIM3d

Como nota final da Figura 4.5, conclui-se que a convergência da solução foi muito rápida, como seria de esperar devido à simplicidade do exemplo, o que conduz a um tempo de execução dos cálculos em computação sequencial inferior a 1 segundo.

Capítulo 4. Validação

Por último, apresenta-se a resolução real do problema obtida através de cálculos analíticos simples:

- I. Começa-se por converter as cargas aplicadas no corpo em tensões, ver Tabela 4.2 estado inicial ($\lambda=1$);

TABELA 4.2 – Tensões aplicadas no corpo e propriedades do círculo de Mohr

| Tensões | Estado | |
|---------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | Inicial (ⁱ) | Colapso (^c) |
| τ_{xy} [MPa] | -5 | -5 |
| σ_x [MPa] | -2 | -2 |
| σ_y [MPa] | -1 | -6.875 |
| Propriedades do círculo de Mohr | | |
| R [MPa] | 5.025 | 5.563 |
| OC [MPa] | -1.500 | -4.438 |
| σ_I [MPa] | 3.525 | 1.125 |
| σ_{II} [MPa] | -6.525 | -10 |

- II. Define-se o critério de cedência (Figura 2.20) para este exemplo, através das propriedades do corpo, que se encontra representado na Figura 4.7. Expõe-se também nesta figura o círculo de Mohr no estado de tensão inicial;

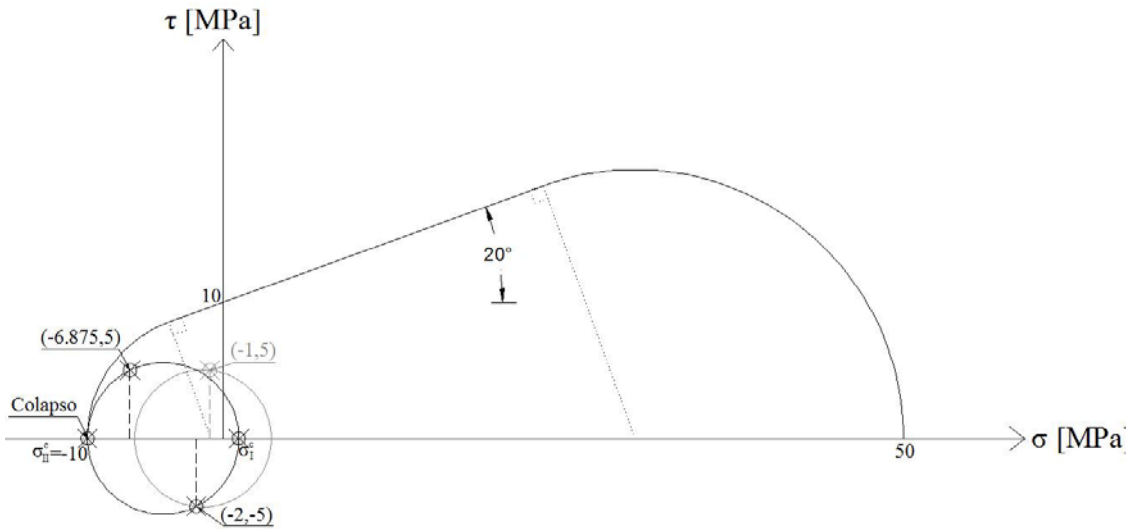


FIGURA 4.7 – Representação do exemplo no diagrama de Mohr

- III. Obtém-se a σ_y no colapso, tendo como base a Figura 4.7. Para isso pensa-se no processo de carregamento até ocorrer o colapso do corpo. O processo de carregamento corresponde a aumentar o carregamento variável (V) e a manter os restantes carregamento constantes (H e C), isto é, corresponde a diminuir σ_y , e a manter constante σ_x e τ_{xy} . Deste processo conclui-se que o círculo de Mohr no estado de tensão no colapso apresenta as seguintes características (ver Tabela 4.2):
 - É constituído pelo ponto (σ_x, τ_{xy}) , que é comum ao círculo de Mohr no estado de tensão inicial;
 - Assume como valor de tensão principal, σ_{II} , o valor de $-T_t$;

Para o referencial da primeira característica define-se o raio (R) e a distância ao centro do círculo de Mohr (OC) no colapso,

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.1)$$

$$OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (4.2)$$

depois define-se as mesmas grandezas para o referencial da segunda característica,

$$R = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \quad (4.3)$$

$$OC = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \quad (4.4)$$

Como ambas as grandezas referidas são referentes ao círculo de Mohr no colapso, pode-se igualar as duas hipóteses de cálculo, obtendo-se no caso do Raio (igualar (4.1) a (4.3)),

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 \quad (4.5)$$

e no caso da distância ao centro do círculo de Mohr no colapso (igualar (4.2) a (4.4)),

$$\sigma_I = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_{II} \quad (4.6)$$

Por último, para obter o valor objectivo da σ_y , basta apenas introduzir a equação (4.6) na equação (4.5) e resolver em ordem a σ_y :

$$\sigma_y = \frac{-\tau_{xy}^2 + \sigma_{II}(\sigma_{II} - \sigma_x)}{(\sigma_{II} - \sigma_x)} \quad (4.7)$$

Para completar a coluna de colapso da Tabela 4.2, basta substituir as grandezas nas equações (4.7), (4.6), (4.1) ou (4.3) e (4.2) ou (4.4) pelos respectivos valores numéricos das características do processo de carregamento.

- IV. Obtém-se o multiplicador de colapso (λ_c), bastando apenas dividir a σ_y no colapso pela σ_y no estado inicial:

$$\lambda_c = 6.875 \quad (4.8)$$

- V. Pretende-se, de modo informativo, determinar neste tópico a zona da função de cedência correspondente a este exemplo. Para isso começa-se por substituir as propriedades do corpo, na expressão do critério de cedência para cada modo (equação (2.42), (2.43) e (2.44)):

$$\text{Modo I: } \sigma_I \leq T_t \rightarrow \sigma_I \leq 10 \quad (4.9)$$

$$\text{Modo II: } \sigma_{II} \geq K_p \sigma_I - \frac{2c \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)} \rightarrow \sigma_{II} \geq 2.040 \sigma_I - 28.563 \quad (4.10)$$

$$\text{Modo III: } \sigma_{II} \geq -T_c \rightarrow \sigma_{II} \geq -50 \quad (4.11)$$

onde a sua representação gráfica apresenta o seguinte aspecto (Figura 4.8):

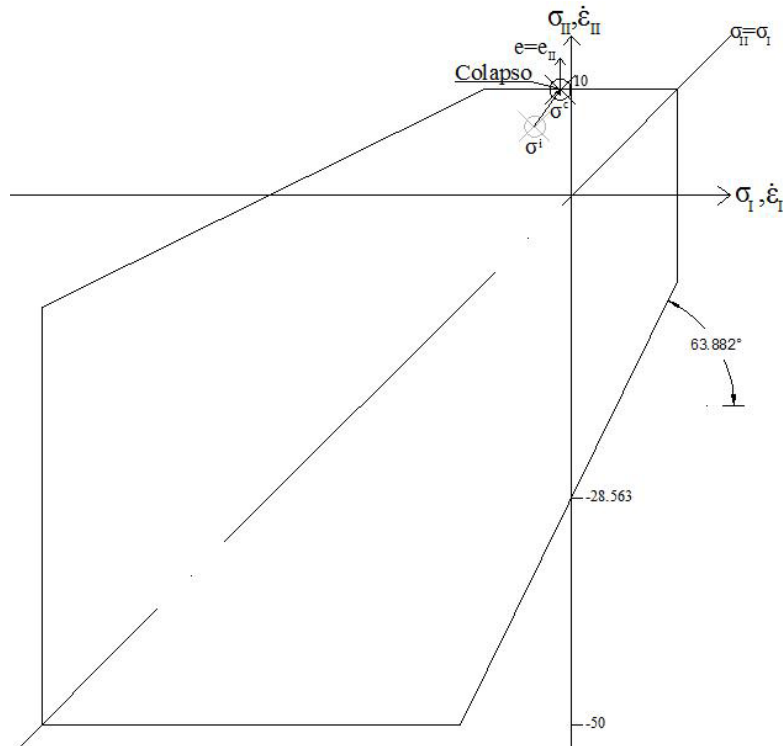


FIGURA 4.8 – Representação gráfica do critério de cedência do exemplo

Nesta figura, também se insere:

- O ponto de tensão principal no estado inicial $\sigma^i = (-\sigma_I^i, -\sigma_{II}^i)$ onde,

$$\sigma_I^i = OC + R \quad (4.12)$$

$$\sigma_{II}^i = OC - R \quad (4.13)$$

onde as grandezas OC e R são calculadas através de (4.2) e (4.1), respectivamente. Os valores numéricos de todas as variáveis definidas neste tópico apresentam-se na Tabela 4.2;

- O ponto de tensão principal no estado de colapso $\sigma^c = (-\sigma_I^c, -\sigma_{II}^c)$, ver Tabela 4.2;
- A direcção e o sentido do carregamento;
- A direcção e o sentido da taxa de deformação (e).

Observando onde o ponto σ^c toca na superfície de cedência (Figura 4.8), conclui-se que este exemplo se encontra na zona (iii) do modo I, através da comparação com a Figura 3.5.

Em nota, refere-se que a convenção de sinais adoptada neste ponto corresponde à convenção de sinais considerada no capítulo 3 (ver capítulo 2.1).

Comparando os diversos resultados obtidos pelo SUBLIM3d, com os resultados reais analíticos, chega-se à conclusão que em todos os casos o corpo atinge o colapso onde se estava à espera, o que confere uma grande confiança sobre a correcta implementação do critério de Armando Nunes Antão.

4.2 Critério de Mário Vicente da Silva

Para este critério expõe-se como modelo o exemplo I (ver Figura 4.1), considerando que a carga variável corresponde à carga H , aplicada na face direita do corpo. De seguida apresenta-se uma breve, mas precisa, descrição dos dados necessários para a resolução do problema (SUBLIM3d e teórica):

- **DIMENSÃO DO CORPO:**
 - $L = 2$
- **CARGAS:**
 - $H = 40 \text{ N}$ (Compressão)
 - $V = 10 \text{ N}$ (Compressão)
- **PROPRIEDADES DO CORPO:**
 - $c = 20 \text{ MPa}$
 - $\varphi = 30^\circ$
 - $T_t = 15 \text{ MPa}$
 - $T_c = 65 \text{ MPa}$

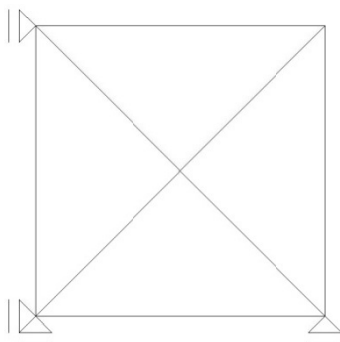


FIGURA 4.9 – Discretização do corpo

Como no modelo anterior, começa-se pela resolução do problema através do SUBLIM3d. A resolução pelo SUBLIM3d inicia-se pela geração da malha do corpo. Devido à homogeneidade de solução do exemplo, optou-se por uma discretização do corpo menos refinada, ver Figura 4.9. Na Tabela 4.3 encontram-se as principais características da malha utilizada, designadamente, o tipo e o número de elementos associado à malha, bem como o número de graus de liberdade globais e locais.

TABELA 4.3 – Principais características da malha

| Tipo de elementos | Número de elementos | DOF | |
|-------------------|---------------------|---------|--------|
| | | Globais | Locais |
| Linear | 4 | 6 | 8 |

O próximo passo é associar as restrições ao corpo, depois define-se o critério de cedência do corpo e por último para concluir o ficheiro de dados, aplicam-se as cargas ao corpo. Por fim, corre-se o ficheiro de dados criado, obtendo-se o resultado apresentado na Figura 4.10.

```
COLLAPSE LOAD MULTIPLIER: 1.8749999999996141
Max. compatibility error(%)= 1.81590866722643316E-011
nr. of total iter.= 76
Elapsed Time: 0 h 0 m 0.18 s
CPU Time: 0 h 0 m 0.16 s
```

FIGURA 4.10 – Resultado obtido pelo SUBLIM3d

Capítulo 4. Validação

Como complemento, representa-se a distribuição da dissipação plástica nos elementos e a configuração do mecanismo de colapso (Figura 4.11).

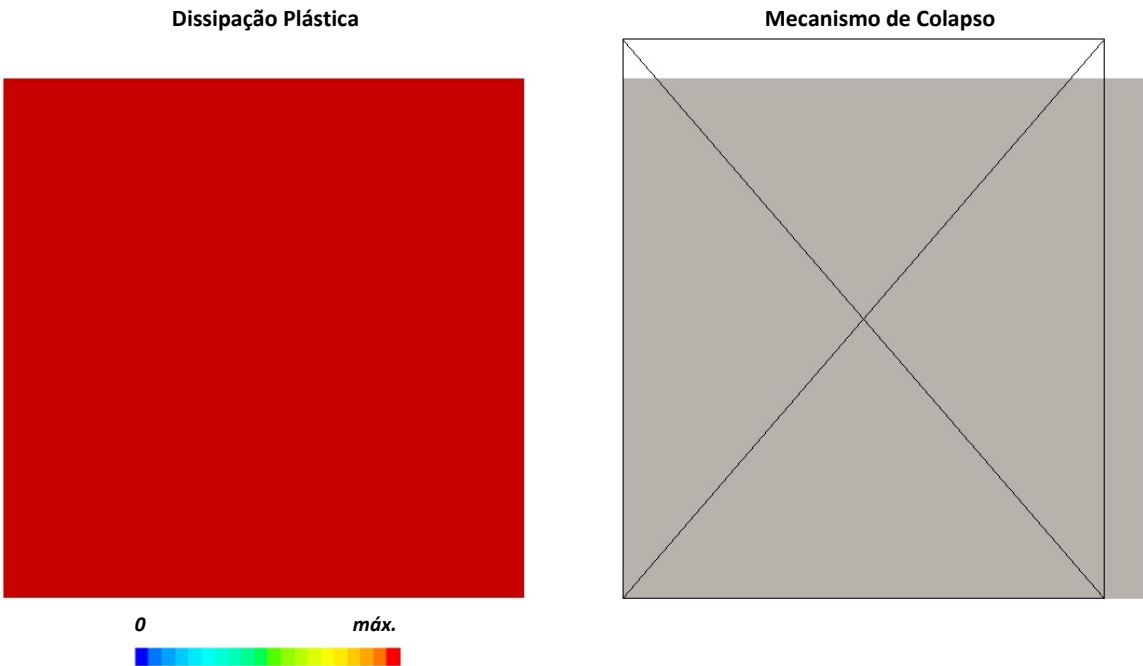


FIGURA 4.11 – Resultados complementares obtidos pelo SUBLIM3d

Como nota final da Figura 4.10, conclui-se que a convergência da solução foi muito rápida, como seria de esperar devido à simplicidade do exemplo, o que conduz a um tempo de execução dos cálculos em computação sequencial inferior a 1 segundo.

Por último, apresenta-se a resolução real do problema obtida através de cálculos analíticos simples:

- I. Começa-se por converter as cargas aplicadas no corpo em tensões (tensões principais), ver Tabela 4.4 estado inicial ($\lambda=1$);

TABELA 4.4 – Tensões principais aplicadas no corpo e propriedade do círculo de Mohr

| Tensões | Estado | | |
|--------------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| | Inicial (ⁱ) | Colapso (^c) | Truncatura (^t) |
| σ_I [MPa] | 40 | 75 | 65 |
| σ_{II} [MPa] | 10 | 10 | 0 |
| Propriedade do círculo de Mohr | | | |
| R [MPa] | 15 | 32.5 | 32.5 |

- II. Define-se o critério de cedência (Figura 2.22) para este exemplo, através das propriedades do corpo, que se encontra representado na Figura 4.12. Expõe-se também nesta figura o círculo de Mohr no estado de tensão inicial e no estado de tensão que origina a truncatura (Tabela 4.4);

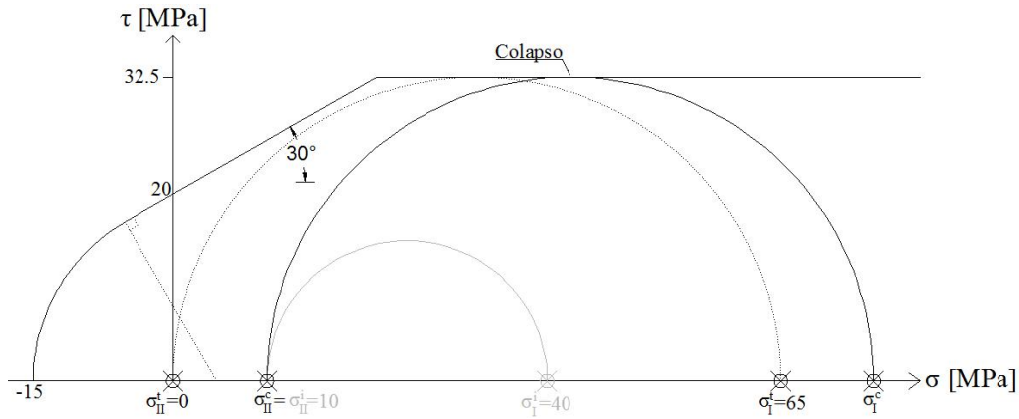


FIGURA 4.12 – Representação do exemplo no diagrama de Mohr

- III. Obtém-se a σ_I no colapso, tendo como base a Figura 4.12. Para isso pensa-se no processo de carregamento até ocorrer o colapso do corpo. O processo de carregamento corresponde a aumentar o carregamento variável (H) e a manter constante o carregamento V , isto é, corresponde a aumentar σ_I e a manter constante σ_{II} . Deste processo conclui-se que o círculo de Mohr no estado de tensão no colapso apresenta as seguintes características (ver Tabela 4.4):

- É constituído pelo ponto $(\sigma_{II}, 0)$ que é comum ao círculo de Mohr no estado de tensão inicial;
- Assume como valor de raio o mesmo valor que o raio do círculo de Mohr no estado de tensão que origina a truncatura (t):

$$R^c = \tau_{máx} = R^t \quad (4.14)$$

Assim, para obter o valor objectivo de σ_I , basta substituir na equação (4.14) a equação (4.3) para o caso do Raio (R) no colapso e resolver em ordem a σ_I :

$$\sigma_I^c = \sigma_{II}^c + 2R^t \quad (4.15)$$

O valor numérico desta equação (Tabela 4.4), obtém-se tendo em consideração a primeira característica do processo de carregamento e substituindo as várias grandezas pelos respectivos valores numéricos.

- IV. Obtém-se o multiplicador de colapso (λ_c), bastando apenas dividir a σ_I no colapso pela σ_I no estado inicial:

$$\lambda_c = 1.875 \quad (4.16)$$

- V. Pretende-se, de modo informativo, determinar neste tópico (à semelhança do exemplo anterior) a zona da função de cedência correspondente a este exemplo. Para isso começa-se por substituir as propriedades do corpo, na expressão do critério de cedência para cada modo (equação (2.48), (2.49) e (2.50)):

$$\text{Modo I: } \sigma_I \leq T_t \rightarrow \sigma_I \leq 15 \quad (4.17)$$

$$\text{Modo II: } \sigma_{II} \geq K_p \sigma_I - \frac{2c \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)} \rightarrow \sigma_{II} \geq 3\sigma_I - 69.282 \quad (4.18)$$

$$\text{Modo III: } \sigma_{II} \geq \sigma_I - T_c \rightarrow \sigma_{II} \geq \sigma_I - 65 \quad (4.19)$$

onde a sua representação gráfica apresenta o seguinte aspecto (Figura 4.13):

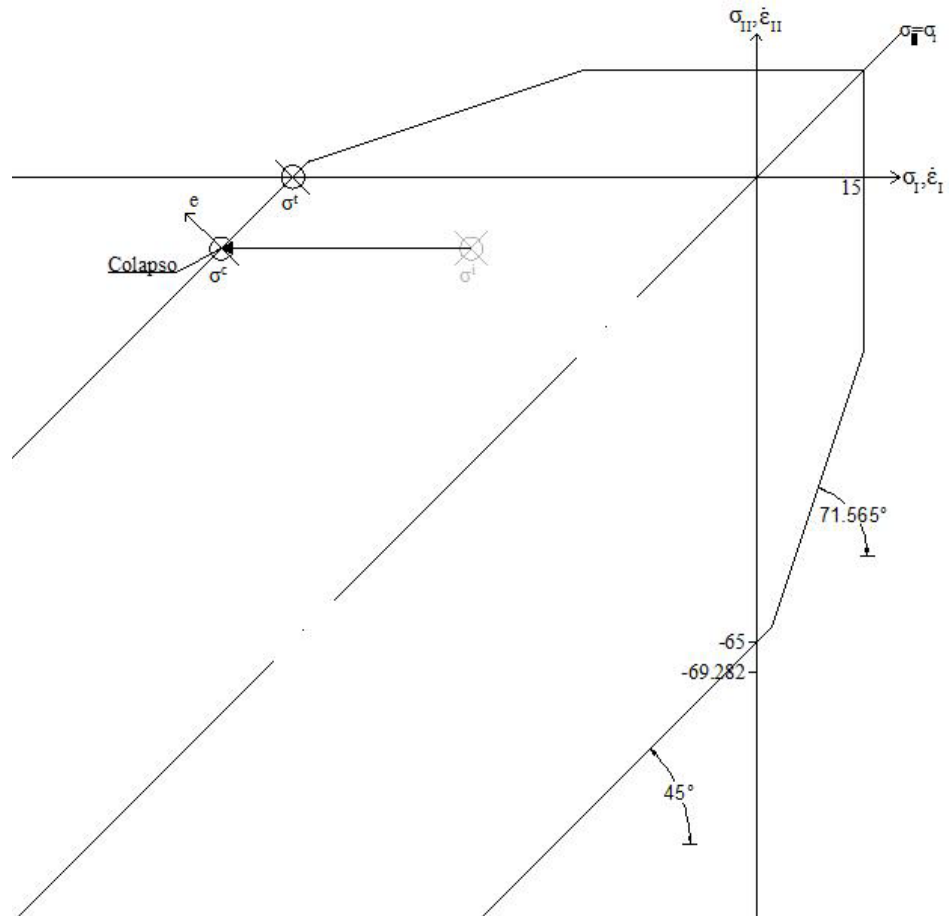


FIGURA 4.13 – Representação gráfica do critério de cedência do exemplo

Nesta figura, também se insere:

- O ponto de tensão principal no estado inicial $\sigma^i = (-\sigma_I^i, -\sigma_{II}^i)$, no estado de colapso $\sigma^c = (-\sigma_I^c, -\sigma_{II}^c)$ e no estado que origina a truncatura $\sigma^t = (-\sigma_I^t, -\sigma_{II}^t)$, ver Tabela 4.4;
- A direcção e o sentido do carregamento;
- A direcção e o sentido da taxa de deformação (e).

Observando onde o ponto σ^c toca na superfície de cedência (Figura 4.13), conclui-se que este exemplo se encontra na zona (v) do modo III, através da comparação com a Figura 3.6.

Em nota, refere-se que a convenção de sinais adoptada neste ponto corresponde à convenção de sinais considerada no capítulo 3 (ver capítulo 2.1).

Comparando os diversos resultados obtidos pelo SUBLIM3d, com os resultados reais analíticos, chega-se à conclusão que em todos os casos o corpo atinge o colapso onde se estava à espera, o que confere uma grande confiança sobre a correcta implementação do critério de Mário Vicente da Silva.

Capítulo 5

Aplicações Numéricas

De forma a ilustrar a execução e versatilidade dos critérios propostos, efectuou-se uma procura bibliográfica de forma a encontrar um conjunto de exemplos susceptíveis de serem analisados neste capítulo. Depois de se ter seleccionado um conjunto alargado de exemplos, procedeu-se à sua triagem, excluindo-se muitos deles devido às seguintes razões:

- Falta de dados geométricos;
- Introdução de particularidades (falhas, etc.) na alvenaria;
- Propriedade(s) desapropriada(s) para os cálculos referentes aos tijolos;
- Falta de alguma(s) propriedade(s) dos tijolos;
- Propriedade(s) desapropriada(s) para os cálculos referentes às juntas;
- Falta de alguma(s) propriedade(s) das juntas;
- Semelhança de carregamento com outro(s) exemplo(s);

ficando assim os três exemplos (correspondendo dois, a casos de critérios sem truncatura e um, a um caso de critérios com truncatura) presentes no subcapítulo 5.2, atendendo a que apresentavam a totalidade dos dados necessários para a resolução do problema ou, alternativamente, caso em que não seja fornecida a totalidade dos dados necessários para a resolução do problema, é possível obter os parâmetros em falta através dos restantes dados. Nesse subcapítulo procede-se à análise destes exemplos através da comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com as soluções disponíveis na literatura (testes experimentais e outras análises).

Para facilitar a obtenção do ficheiro de dados destes exemplos, criaram-se programas para acelerar o processo de análise destes exemplos. A principal característica destes programas é a capacidade de gerar a malha para qualquer dimensão da alvenaria/tijolo.

5.1 Programas

5.1.1 Bases SUBLIM3d

Neste tópico apresentam-se algumas bases sobre o SUBLIM3d que são relevante no presente trabalho:

- Os elementos de junta são definidos considerando negativa a sua numeração;
- Os elementos de corpo rígido são definidos considerando negativo o número do material que os constituem.

5.1.2 Desenvolvimento do programa gerador da malha

O programa apresentado neste tópico corresponde ao usado na análise dos exemplos presentes no capítulo 5.2. Este programa já existia anteriormente, apresentando a seguinte sequência de etapas:

- I. Definição das variáveis;
- II. Leitura e associação da informação fornecida pelo ficheiro de leitura às variáveis;
- III. Criação dos nós;
- IV. Criação dos elementos (ver Figura 5.1) para:

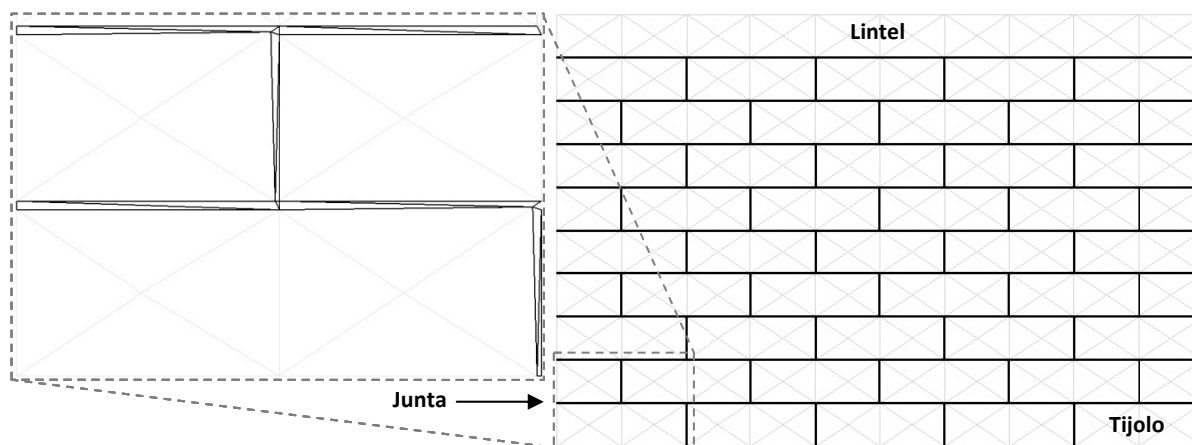


FIGURA 5.1 – Tipo de elementos que definem os tijolos, as juntas e o lintel do modelo de uma parede de alvenaria

- a. Os tijolos;
- b. As juntas;
- c. O Lintel (caso exista);
- V. Criação e impressão do ficheiro de dados.

Depois, o autor da presente dissertação reviu o programa e acrescentou várias funcionalidades:

- A possibilidade de existência de lintel superior numa largura diferente da largura da parede;
- A possibilidade de existência de apoios nos extremos;
- A possibilidade de existência de diferentes tipos de apoios;
- A capacidade de carregar as faces da alvenaria com diferentes tipos de carregamento;
- A possibilidade dos carregamentos aplicados na alvenaria serem constituídos por uma componente constante e outra variável;
- A possibilidade de se observar a numeração dos elementos de junta (através da distorção da malha);
- A capacidade de inserir automaticamente o nome do ficheiro de dados.

Alterou-se também o ficheiro de leitura de dados, ficando com o aspecto final apresentado na Figura 5.2. Como se concluiu da observação desta figura é necessário introduzir manualmente alguns dados no programa:

- As propriedades dos tijolos;
- As propriedades das juntas;
- As propriedades do lintel (caso exista);
- Os valores numéricos das cargas aplicadas nas faces da alvenaria;

- Os valores dos parâmetros opcionais (tolerância, número máximo de iterações e alterações ao parâmetro de penalidade inicial).

```
--
--
-  ( )
-  ( )
-
-
-
-
-  ( )
-
1 linha: Número de tijolos por fiada, número de fiadas [sem contar com o
lintel superior caso exista];
2 linha: Largura do tijolo, altura do tijolo
3 linha: Inserir 1 se os tijolos são elementos de corpo rígido e 0 caso
contrário;
4 linha: Inserir 2 se existir lintel superior apenas numa determinada
largura, 1 se existir lintel superior em toda a largura da alvenaria e 0
caso não exista lintel superior (caso opte pela opção 2 de seguida
indicar quantos tijolos definem o lintel superior, com precisão de um
tijolo);
5 linha: Inserir 1 se toda a base da alvenaria for rígida e 0 caso
apresente apoios apenas nos extremos (caso opte pela opção 0 de seguida
indicar quantos tijolos definem os apoios nos extremos, com precisão de
meio tijolo)
6 linha: TOPO DA ALVENARIA - Inserir 0 caso não tenha qualquer carga
distribuída aplicada na face, 1 se tiver uma carga normal, -1 se tiver
uma carga de corte e 2 se tiver tanto uma carga normal como uma carga de
corte [introduzir o valor numérico das cargas manualmente];
7 linha: FACE ESQUERDA DA ALVENARIA - Inserir 0 caso não tenha qualquer
carga distribuída aplicada na face, 1 se tiver uma carga normal, -1 se
tiver uma carga de corte e 2 se tiver tanto uma carga normal como uma
carga de corte [introduzir o valor numérico das cargas manualmente];
8 linha: FACE DIREITA DA ALVENARIA - Inserir 0 caso não tenha qualquer
carga distribuída aplicada na face, 1 se tiver uma carga normal, -1 se
tiver uma carga de corte e 2 se tiver tanto uma carga normal como uma
carga de corte [introduzir o valor numérico das cargas manualmente];
9 linha: BASE DA ALVENARIA - Inserir 0 caso não tenha qualquer carga
distribuída aplicada na face e 1 se tiver uma carga de corte [introduzir
o valor numérico das cargas manualmente];
10 linha: Inserir 0 caso a base da alvenaria se encontre encastrada e 1
se encontra simplesmente apoiada;
11 linha: Inserir 0 caso pretenda ver os elementos de junta e 1 caso
contrário (caso opte pela opção 0 de seguida indicar a percentagem de
distorção da malha);
12 linha: Inserir o nome que se pretende dar ao ficheiro de dados (15
caracteres no máximo).
```

FIGURA 5.2 – Ficheiro de leitura do programa gerador de malhas

Por último, procedeu-se à validação do programa para as várias funcionalidades que o constituem, concluindo após este processo de que o programa foi correctamente implementado.

Durante o processo de desenvolvimento deste programa, tomou-se consciência de algumas limitações:

- Incapacidade de aumentar o grau de refinamento da alvenaria;
- Incapacidade de considerar diferentes tipos de malha;
- Impossibilidade de considerar diferentes larguras para o primeiro bloco da primeira e da segunda fiada;

onde a sua introdução provocaria a reformulação quase completa da programação deste programa, levando a que o trabalho que se teria seria semelhante ao da criação de um novo.

5.1.3 Criação do ficheiro de comandos possibilitando a geração de malhas

Embora este método não tenha sido usado no presente trabalho, devido ao insucesso na criação dos elementos de junta, é capaz de ultrapassar as limitações referidas no ponto anterior. Este programa foi criado pelo Professor Doutor Mário Vicente da Silva, mas ainda se encontra em fase de desenvolvimento. Quando o programa se encontrar concluído irá apresentar a seguinte sequência de etapas, ver Figura 5.3.

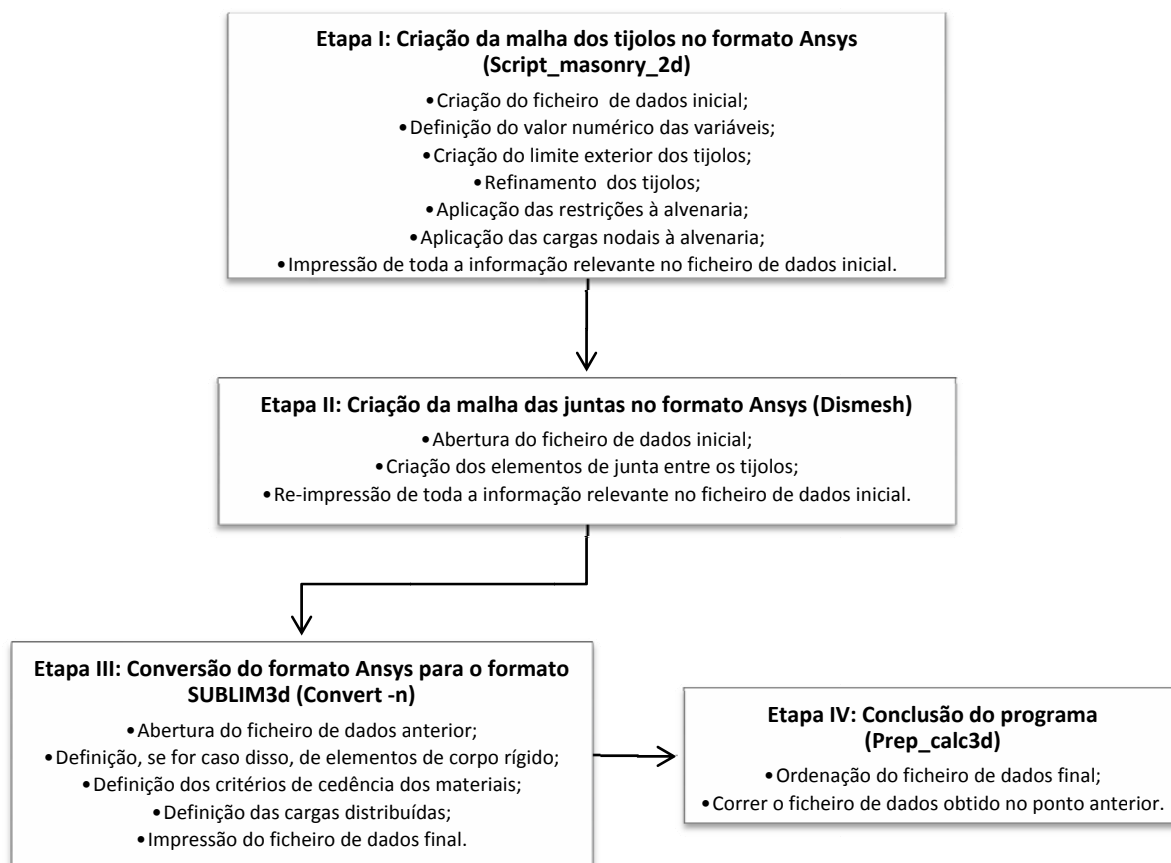


FIGURA 5.3 – Etapas que definem o ficheiro de comandos que permite a geração de malhas

De seguida apresentam-se alguns esclarecimentos sobre estas etapas (ver Figura 5.3):

- Etapa I:
 - Ponto 2: As variáveis iniciais que precisam de ser introduzidas manualmente encontram-se na Figura 5.4.

```

nrlinhasi=_      !Número de fiadas ímpar
nrlinhasp=_      !Número de fiadas par
esp=_            !Espessura dos tijolos
comp=_           !Largura dos tijolos
alt=_            !Altura dos tijolos
offseti=_        !Largura do primeiro tijolo da fiada ímpar
offsetp=_        !Largura do primeiro tijolo da fiada par
nrblocosi=_      !Número de tijolos inteiros existentes em cada fiada
elem_altura=_    !Número de elementos existentes na altura de cada tijolo
elem_comp=_      !Número de elementos existentes na largura de cada tijolo
  
```

FIGURA 5.4 – Dados necessários pela 1ª etapa do processo de criação de malhas

- Ponto 3: Depois da criação do limite exterior dos tijolos, define-se que os tijolos da fiada ímpar são constituídos pelos materiais 1 e 2 de forma alternada e os tijolos da fiada par são constituídos pelos materiais 3 e 4 de forma alternada. Esta disposição é fulcral para a etapa II, porque permite saber onde se deve colocar os elementos de junta (tanto na horizontal como na vertical);
- Ponto 6: Neste ponto associam-se os nós onde são aplicadas as cargas ao respectivo grupo de carregamento. Para permitir que a alvenaria possa ser carregada com qualquer tipo de carregamento, definiram-se sete grupos de carregamento: dois carregamentos na face esquerda (normal e tangencial), dois carregamentos no topo (normal e tangencial), dois carregamentos na face direita (normal e tangencial) e um carregamento na base (tangencial);
- Etapa II: Esta etapa corresponde à etapa que se encontra ainda em fase de desenvolvimento;
- Etapa III:
 - Ponto 2: Neste ponto tem que se definir manualmente se existem elementos de corpo rígido;
 - Ponto 3: Aqui define-se manualmente o critério de cedência dos tijolos (quatro materiais) e das juntas;
 - Ponto 4: Neste tópico procede-se à conversão das cargas nodais em cargas distribuídas e define-se manualmente o valor numérico de cada grupo de carregamento;
 - Ponto 5: Este ponto engloba a introdução manual dos valores dos parâmetros opcionais (tolerância, número máximo de iterações e alterações ao parâmetro de penalidade inicial).

O autor da presente dissertação tratou da revisão deste programa e da correcção de falhas detectadas.

Como nota final deste método, refere-se que este se encontra numa fase inicial de desenvolvimento, não tendo merecido uma atenção maior atendendo a que os exemplos apresentados no capítulo 5.2 são gerados facilmente pelo primeiro programa.

5.2 Exemplos

O processo de validação da aplicabilidade dos critérios usados propriamente dito inicia-se neste subcapítulo, com a análise de dois exemplos de aplicação de critérios sem truncatura e um exemplo de aplicação de critérios com truncatura.

5.2.1 Exemplos de aplicação de critérios sem truncatura

As cargas de colapso destes exemplos não são afectadas pelas truncaturas dos critérios propostos, pelo que se considerou exclusivamente o critério de Mohr-Coulomb (capítulo 3.2.2.1). Este critério, como foi dito anteriormente, já se encontrava implementado na formulação do SUBLIM3d, servindo o processo de análise, neste caso, para validar a aplicabilidade deste critério à determinação de cargas de colapso de sistemas de alvenaria.

5.2.1.1 Exemplo 1

Este primeiro exemplo foi retirado do trabalho de P. DeBuhan e G. DeFelice [12]. Corresponde a uma alvenaria simples sujeita à inclinação do plano de suporte. Neste exemplo, para além de se analisar a aplicabilidade deste critério na determinação de cargas de colapso de sistemas de alvenaria, pretende-se também investigar a influência dos seguintes aspectos no comportamento das alvenarias simples: rácio entre a largura e a altura dos tijolos e o rácio entre a largura e a altura das paredes.

5.2.1.1.1 Definição

Para a definição deste exemplo apresentam-se de seguida os dados fornecidos pelos autores de [12], em relação a:

- **Propriedades da alvenaria:**

A estrutura deste exemplo corresponde a uma alvenaria de tijolos rectangulares ($m=0.4375$ ou $m=0.875$) encastrada na base em toda a sua largura, ver Figura 5.5.

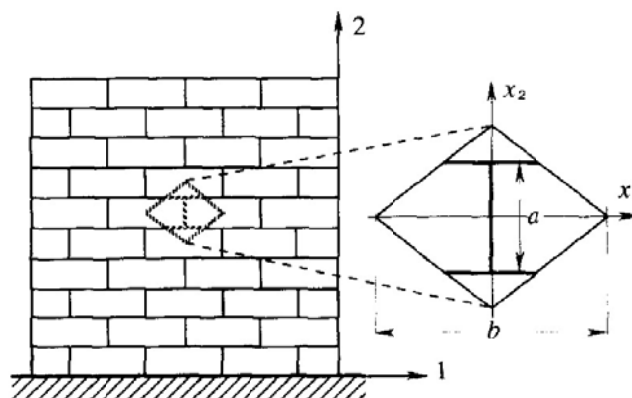


FIGURA 5.5 – Estrutura da alvenaria do exemplo 1 [12]

- **Propriedades dos materiais:**

As juntas exibem propriedades de resistência puramente atríticas ($c = 0$) sendo o ângulo de atrito dado por:

$$\varphi = \tan^{-1} 0.6 \quad (5.1)$$

- **Tipo de Carregamento:**

Estas paredes foram sujeitas ao aumento do ângulo de inclinação do plano de suporte da estrutura (θ) até ocorrer o seu colapso, ver Figura 5.6.

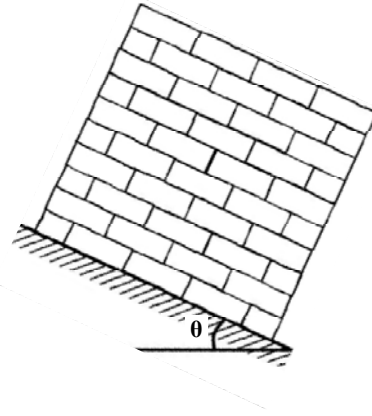


FIGURA 5.6 – Tipo de carregamento do exemplo 1 (adaptado de [12])

5.2.1.1.2 Resultados experimentais/Propostas

Os resultados experimentais existentes foram obtidos em testes realizados no Departamento de Ingegneria Strutturale e Geotecnica da Universidade de Roma. O ensaio a que foram sujeitas as paredes é equivalente a inclinar a gravidade por um ângulo θ até ocorrer o colapso da alvenaria, isto é, semelhante a considerar as paredes sujeitas tanto ao peso específico dos blocos (γ), que é vertical e constante, como a uma componente horizontal das forças de massa ($\lambda\gamma$) que é aumentada gradualmente até ocorrer o colapso da alvenaria (onde $\lambda \geq 0$ é um parâmetro de carregamento não dimensional). Portanto pode-se representar o domínio de estabilidade da estrutura no seguinte plano de carregamento ($\gamma_1 = \gamma \geq 0, \gamma_2 = \lambda\gamma \geq 0$) que se encontra simplesmente limitado por uma semi-linha de equação $\gamma_2 = \lambda^*\gamma_1$, onde λ^* corresponde ao último valor de λ , ver Figura 5.7.

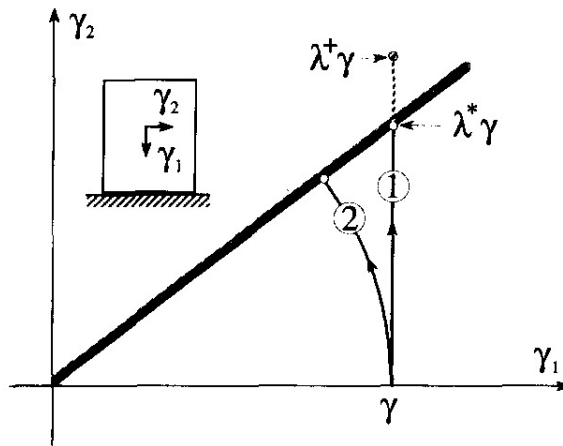


FIGURA 5.7 – Domínio de estabilidade do exemplo 1 no plano de carregamento (γ_1, γ_2) [12]

Na Figura 5.7 representa-se a trajetória de carregamento do ensaio experimental que segue um esquema circular de carregamento (caminho número 2) definido por:

$$\gamma_1 = \gamma \cos \theta, \quad \gamma_2 = \gamma \sin \theta \quad (5.2)$$

O valor experimental do parâmetro de carregamento não dimensional no colapso (λ^{exp}) é obtido por:

$$\tan(\theta^{lim}) = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\lambda^{exp} \gamma}{\gamma} \leftrightarrow \lambda^{exp} = \tan(\theta^{lim}) \quad (5.3)$$

onde θ^{lim} representa o ângulo de inclinação limite em que o colapso da parede foi observado. Os valores experimentais obtidos através da conversão (5.3) encontram-se impressos na Figura 5.12 para o caso de $m=0.4375$ e na Figura 5.13 para o caso de $m=0.875$.

Apresenta-se agora resumidamente a ferramenta de cálculo apresentada no artigo [12] que considera a modelação macro para a modelação da alvenaria, optando por considerar as juntas como um material perfeitamente plástico e os tijolos como um material rígido. Baseia-se no teorema cinemático do método da análise limite para a resolução do problema e considera a superfície de cedência de Mohr-Coulomb.

Considerando os blocos como um material rígido, a velocidade na direcção perpendicular (y_3) é nula, provocando que a deformação nessa direcção também seja nula. Assim propõe-se um mecanismo homogeneizado de rotura de corpo rígido, onde, numa primeira fase corresponde a dar-se um movimento virtual de corpo rígido à parte da estrutura localizada acima da linha inclinada OO' (ver Figura 5.8) e numa segunda fase corresponde a originar-se uma rotação de corpo rígido em relação ao ponto O ($\chi = 0$).

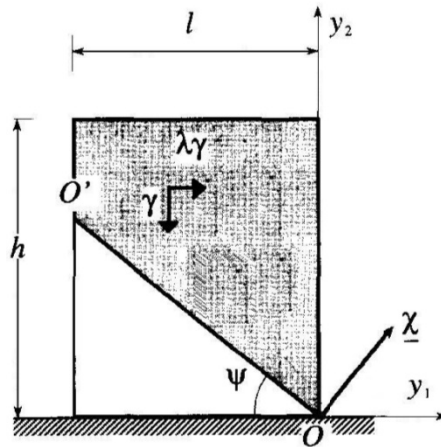


FIGURA 5.8 – Proposta apresentada no artigo (adaptado de [12])

Tendo em atenção este mecanismo de ruptura obtém-se a estimativa obtida nesta proposta (esta estimativa, encontra-se corrigida em relação à apresentada em [12], porque os autores não apresentam o sinal negativo no expoente do primeiro ramo do sistema de equações):

$$\lambda^* \leq \lambda^+ = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\tan \varphi} \right)^{-\frac{1}{2}} & \text{se } \rho \leq \left(\frac{m}{\tan \varphi} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{3\rho - 2 \left(\frac{m}{\tan \varphi} \right)^{\frac{1}{2}}}{3\rho^2 - \left(\frac{m}{\tan \varphi} \right)} & \text{se } \rho \geq \left(\frac{m}{\tan \varphi} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (5.4)$$

onde,

$$\rho = \frac{h}{l} \quad (5.5)$$

$$m = 2 \frac{a}{b} \quad (5.6)$$

levando à determinação de um valor da região superior ($\gamma_2 = \lambda^+ \gamma_1$), que é obtido através do caminho número 1 da Figura 5.7. Conclui-se da observação da equação (5.4) que o valor extremo do parâmetro de carregamento, λ^+ , é uma função que não depende do peso específico dos tijolos. A representação gráfica da equação (5.4), para os casos de $m=0.4375$ e $m=0.875$ encontra-se na Figura 5.12 e na Figura 5.13, respectivamente.

5.2.1.1.3 Simplificações/Considerações

O primeiro objectivo deste exemplo era a possibilidade de comparar os resultados experimentais apresentados por P. DeBuhan e G. DeFelice [12] com os resultados obtidos pelo SUBLIM3d, mas tal não foi possível porque a informação apresentada nesse artigo é muito incompleta em relação a vários aspectos que afectam a criação do ficheiro de dados. Em última circunstância, para resolver esta falta de dados, tentou-se contactar via correio electrónico o professor P. DeBuhan, mas não se obteve qualquer resposta. Assim como forma meramente comparativa resolveu-se apresentar os resultados experimentais nos mesmos gráficos que os resultados das propostas.

O segundo objectivo deste exemplo era a possibilidade de comparar os resultados obtidos pela proposta apresentada por P. DeBuhan e G. DeFelice [12] com os resultados obtidos pelo SUBLIM3d. Este objectivo já foi possível, mas para ser alcançado correctamente teve-se que executar um conjunto de hipóteses:

- **Em relação às propriedades da alvenaria:**

- Considerou-se que os tijolos apresentam uma largura irreal de 1.6 mm, porque é o primeiro valor com uma casa decimal que origina que a altura dos tijolos tenha no máximo duas casas decimais para os dois casos de m ;
- A altura dos tijolos é obtida resolvendo a equação (5.6) em relação a a ,

$$a = \frac{m}{2} \times b \quad (5.7)$$

- Considerou-se que a alvenaria é constituída por 512 fiadas;
- O número de tijolos que constituem cada fiada é obtido considerando que,

$$h = n^{\circ} \text{ fiadas} \times a \quad (5.8)$$

$$l = n^{\circ} \text{ tijolos por fiada} \times b \quad (5.9)$$

substituindo agora estas equações na equação (5.5) obtém-se,

$$\rho = \frac{a}{b} \times \frac{n^{\circ} \text{ fiadas}}{n^{\circ} \text{ tijolos por fiada}} \quad (5.10)$$

tendo agora em consideração a equação (5.6), basta resolver a equação (5.10) em relação ao número de tijolos por fiada,

$$n^{\circ} \text{ tijolos por fiada} = \frac{m}{2} \times \frac{n^{\circ} \text{ fiadas}}{\rho} \quad (5.11)$$

Como o SUBLIM3d apenas fornece resultados pontuais, a única maneira de comparar com a proposta (que corresponde uma função contínua) foi, para um determinado m , considerar valores de ρ a variar entre 0.05 e 3 em incrementos de 0.05, criando-se depois uma linha que passa pelos diversos pontos definidos. Em alguns casos o resultado obtido pela equação (5.11) é decimal, nesses casos, arredonda-se o número de tijolos por fiada para o número inteiro mais próximo e recalcula-se o valor de ρ pela equação (5.10);

- Considerou-se os tijolos como elementos rígidos (que corresponde à mesma hipótese apresentada pela proposta);
- **Em relação às propriedades dos materiais:**
 - Embora os tijolos sejam modelados por elementos rígidos considerou-se, devido ao enunciado no segundo tópico do capítulo 5.1.1, que estes elementos exibiriam uma coesão de 1000MPa e um ângulo de atrito de 45°, para que o colapso da alvenaria ocorra sempre nas juntas;
- **Em relação ao tipo de carregamento:**
 - Considerou-se o mesmo raciocínio do carregamento da proposta, isto é, considerou-se que a parede na vertical se encontra sujeita ao peso específico dos blocos (que é constante) e na horizontal a uma carga variável que representa a componente horizontal das forças de massa ($\lambda\gamma$);
 - Considerou-se que o multiplicador de colapso não depende do peso específico dos tijolos (que corresponde à conclusão da proposta), optando-se assim por considerar um valor unitário para o peso específico (1N/m³);
- **Em relação aos parâmetros opcionais:**
 - Considerou-se que a solução obtida pelo SUBLIM3d é alcançada pela precisão (1x10⁻⁶);
 - Considerou-se que a alteração ao parâmetro de penalidade inicial é igual a 0.1, porque este valor permite que a solução seja boa e que convirja rapidamente;
- **Em relação ao número de fiadas que constituem a alvenaria:**

O processo de alcançar resultados que não se distingam dos homogeneizados foi executado, de forma simplificativa, apenas para o ponto $\rho=1$ da Figura 5.13 e depois executou-se a sua extrapolação para os restantes casos dessa figura e da Figura 5.12. Começa-se por supor que o número de tijolos por fiada apenas pode variar no intervalo de 1 a 10. Depois, para cada caso desse intervalo, calcula-se o respectivo número de fiadas, através da seguinte equação (obtida através da equação (5.11)),

$$n^{\circ} \text{ fiadas} = \frac{2 \times n^{\circ} \text{ tijolos por fiada} \times \rho}{m} \quad (5.12)$$

concluindo-se que o único valor inteiro obtido corresponde a 16 fiadas que se verifica no caso de existirem 7 tijolos por fiada. Em seguida, para este caso, aumenta-se a proporção da alvenaria (mantendo-se constante a relação entre a altura e a largura) em múltiplos de 2ⁿ (com n a variar no intervalo de 1 a 6), ver Tabela 5.1.

TABELA 5.1 – Multiplicador de colapso para as várias proporções da alvenaria dos cálculos efectuados

| Nº tijolos por fiada | Nº fiadas | λ_c |
|----------------------|-----------|-------------|
| 7 | 16 | 0.5161 |
| 14 | 32 | 0.4507 |
| 28 | 64 | 0.4181 |
| 56 | 128 | 0.4050 |
| 112 | 256 | 0.3988 |
| 224 | 512 | 0.3959 |
| 448 | 1024 | 0.3946 |

Depois corre-se o ficheiro de dados das 7 proporções consideradas, obtendo-se os resultados apresentados na Tabela 5.1 e na Figura 5.9.

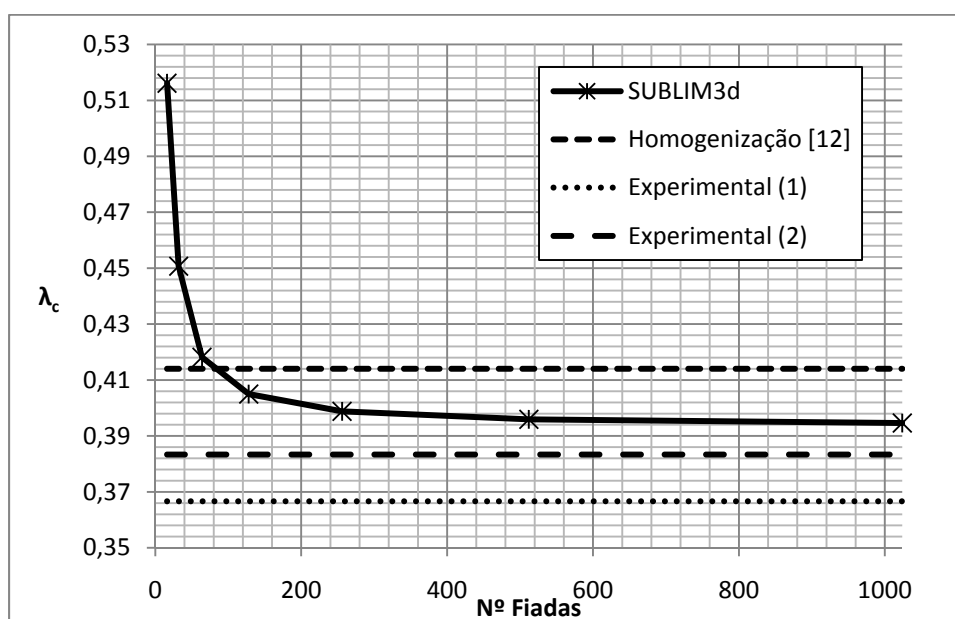


FIGURA 5.9 – Representação gráfica dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d, pela proposta [12] e pelos resultados experimentais, para o caso de $\rho=1$ e $m=0.875$

Para se ter a noção da capacidade do SUBLIM3d (para o caso de $\rho=1$ e $m=0.875$), representam-se também nesta figura (Figura 5.9) tanto os resultados obtidos pela proposta [12] como os resultados experimentais. Pela observação da Figura 5.9 conclui-se que os resultados que não se distinguem dos homogeneizados se atingem para um número de fiadas maior ou igual a 128. Para achar o número de fiadas óptimo (que se supõe neste caso que se atinge quando o erro é inferior ou igual a 2%) representou-se os resultados na Figura 5.10,

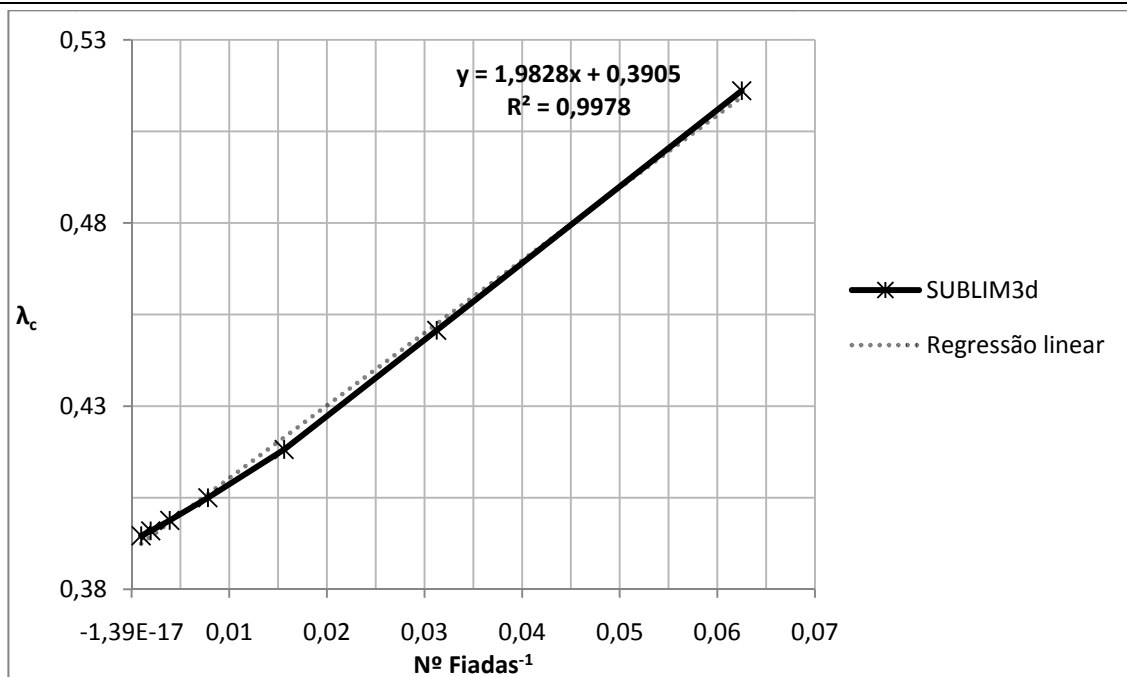


FIGURA 5.10 – Representação gráfica da tendência do multiplicador de colapso

de forma a que se possa determinar, através de uma regressão linear simples, o valor para que tende o multiplicador de colapso na homogeneização extrema (quando o número de fiadas tende para infinito), que corresponde ao valor de 0.3905. Tendo este valor limite, λ_c^{hom} , determina-se o erro respectivo,

$$Erro(\%) = \frac{\lambda_c - \lambda_c^{hom}}{\lambda_c^{hom}} \times 100\% \quad (5.13)$$

para cada uma das proporções consideradas, ver Tabela 5.2.

TABELA 5.2 – Erro obtido ao considerar cada multiplicador de colapso

| Nº fiadas | Erro (%) |
|-----------|----------|
| 16 | 32.2 |
| 32 | 15.4 |
| 64 | 7.1 |
| 128 | 3.7 |
| 256 | 2.1 |
| 512 | 1.4 |
| 1024 | 1.1 |

Conclui-se então pela observação da tabela anterior (Tabela 5.2), que o valor que se pretendia verifica-se nas 512 fiadas (como se tinha inserido na hipótese em relação às propriedades da alvenaria).

- Número de processadores utilizados nos cálculos:**

Com recurso a um sistema de processamento em paralelo (Geocluster), que possui razoáveis capacidades computacionais, é possível testar alvenarias de grandes dimensões, por isso apenas neste exemplo recorreu-se ao Geocluster para se executar os cálculos. Depois desta decisão surge a seguinte questão: Qual o número de processadores mais eficiente (que permite obter resultados mais rapidamente) para os vários cálculos deste exemplo? A resposta requer um

procedimento muito simples, que corresponde a calcular a alvenaria, que apresenta 224 tijolos por cada uma das 512 fiadas com $\rho=1$ e $m=0.875$, para os diferentes números de processadores disponíveis (3, 5, 9, 17 e 33) limitando o cálculo às 150000 iterações (nunca atingindo a precisão de 1×10^{-7}). Chega-se à conclusão que neste caso o número de processadores mais eficiente corresponde a 17, porque se atinge o multiplicador de colapso no menor espaço de tempo (ver Figura 5.11).

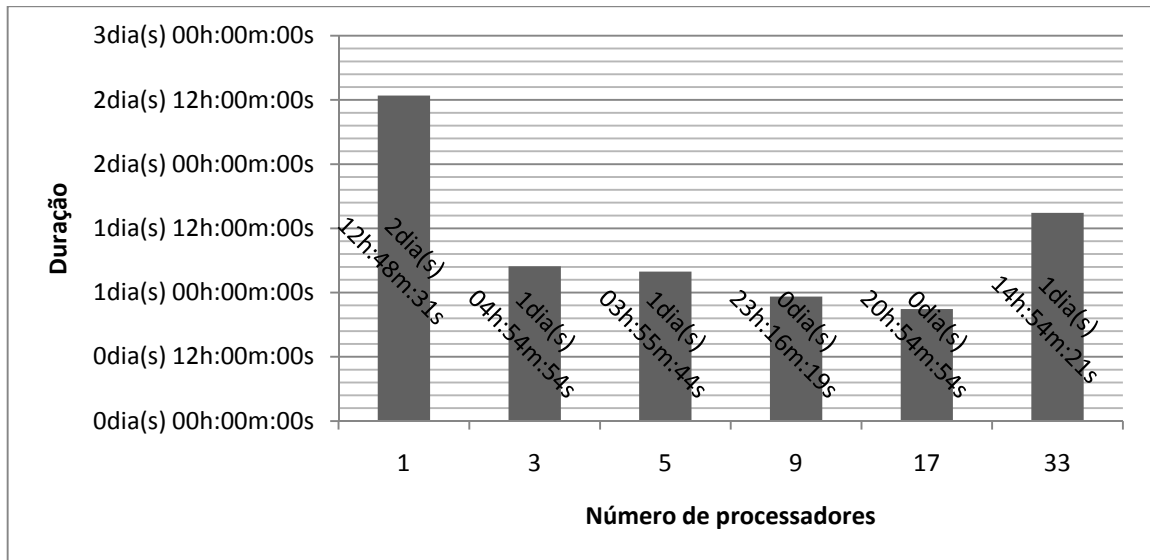


FIGURA 5.11 – Determinação do número de processadores mais eficiente para o exemplo 1

5.2.1.1.4 Resultados SUBLIM3d

Os resultados obtidos pelo SUBLIM3d (tendo em consideração o capítulo 5.2.1.1.3) para o caso de $m=0.4375$ e $m=0.875$ apresentam-se de forma gráfica na Figura 5.12 e Figura 5.13, respectivamente.

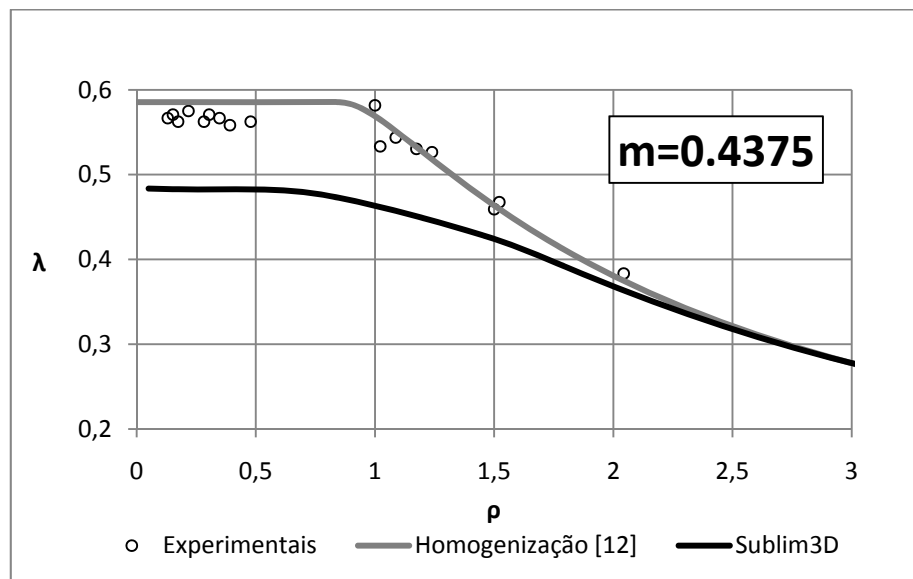


FIGURA 5.12 – Comparação dos multiplicadores de cedência obtidos pelo SUBLIM3d com os obtidos por [12] e pelos ensaios experimentais, para o caso de $m=0.4375$

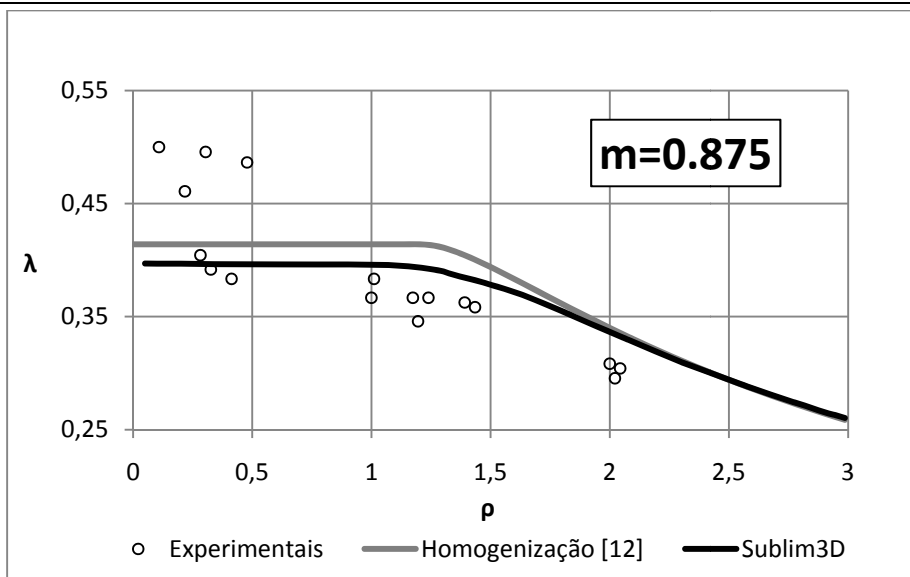


FIGURA 5.13 – Comparação dos multiplicadores de cedência obtidos pelo SUBLIM3d com os obtidos por [12] e pelos ensaios experimentais, para o caso de $m=0.875$

Os resultados expressos nestas figuras (Figura 5.12 e Figura 5.13) apresentam um tempo de convergência quase sempre decrescente com o aumento de ρ . No caso de $m=0.4375$ o tempo de convergência varia entre 5 horas 22 minutos e 56 segundos ($\rho=0.05$) a 6 minutos e 57 segundos ($\rho=2.95$), por outro lado, para o caso de $m=0.875$ o tempo de convergência varia entre 1 dia 0 horas 50 minutos e 23 segundos ($\rho=0.05$) a 22 minutos e 13 segundos ($\rho=3$).

De seguida, como forma exemplificativa, apresentam-se os resultados obtidos pelo SUBLIM3d para o caso de $m=0.4375$ e $m=0.875$ nos pontos $\rho=0.25$ e $\rho=2.8$. Começa-se por apresentar na Tabela 5.3, as principais características da malha utilizada, designadamente, o tipo e o número de elementos associado à malha, bem como o número de graus de liberdade globais e locais.

TABELA 5.3 – Principais características da malha do exemplo 1 para os casos de $m=0.4375$ e 0.875 nos pontos $\rho=0.25$ e 2.8

| m | ρ | Tipo de elementos | Número de elementos | DOF | |
|--------|--------|-------------------|---------------------|---------|----------|
| | | | | Globais | Locais |
| 0.4375 | 0.25 | Linear | 3208960 | 1377792 | 6417920 |
| | 2.8 | Linear | 286048 | 124416 | 572096 |
| 0.875 | 0.25 | Linear | 6418432 | 2754048 | 12836864 |
| | 2.8 | Linear | 572608 | 247296 | 1145216 |

Depois apresenta-se na Tabela 5.4 os multiplicadores de cedência obtidos pelo SUBLIM3d.

TABELA 5.4 – Multiplicadores de cedência obtidos pelo SUBLIM3d para os casos de $m=0.4375$ e 0.875 nos pontos $\rho=0.25$ e 2.8 do exemplo 1

| m | ρ | λ_c |
|--------|--------|-------------|
| 0.4375 | 0.25 | 0.48270 |
| | 2.8 | 0.29258 |
| 0.875 | 0.25 | 0.39655 |
| | 2.8 | 0.27251 |

Por fim, representa-se a distribuição da dissipação plástica nos elementos e a configuração do mecanismo de colapso (Figura 5.14 para o caso de $m=0.4375$ e Figura 5.15 para o caso de $m=0.875$).

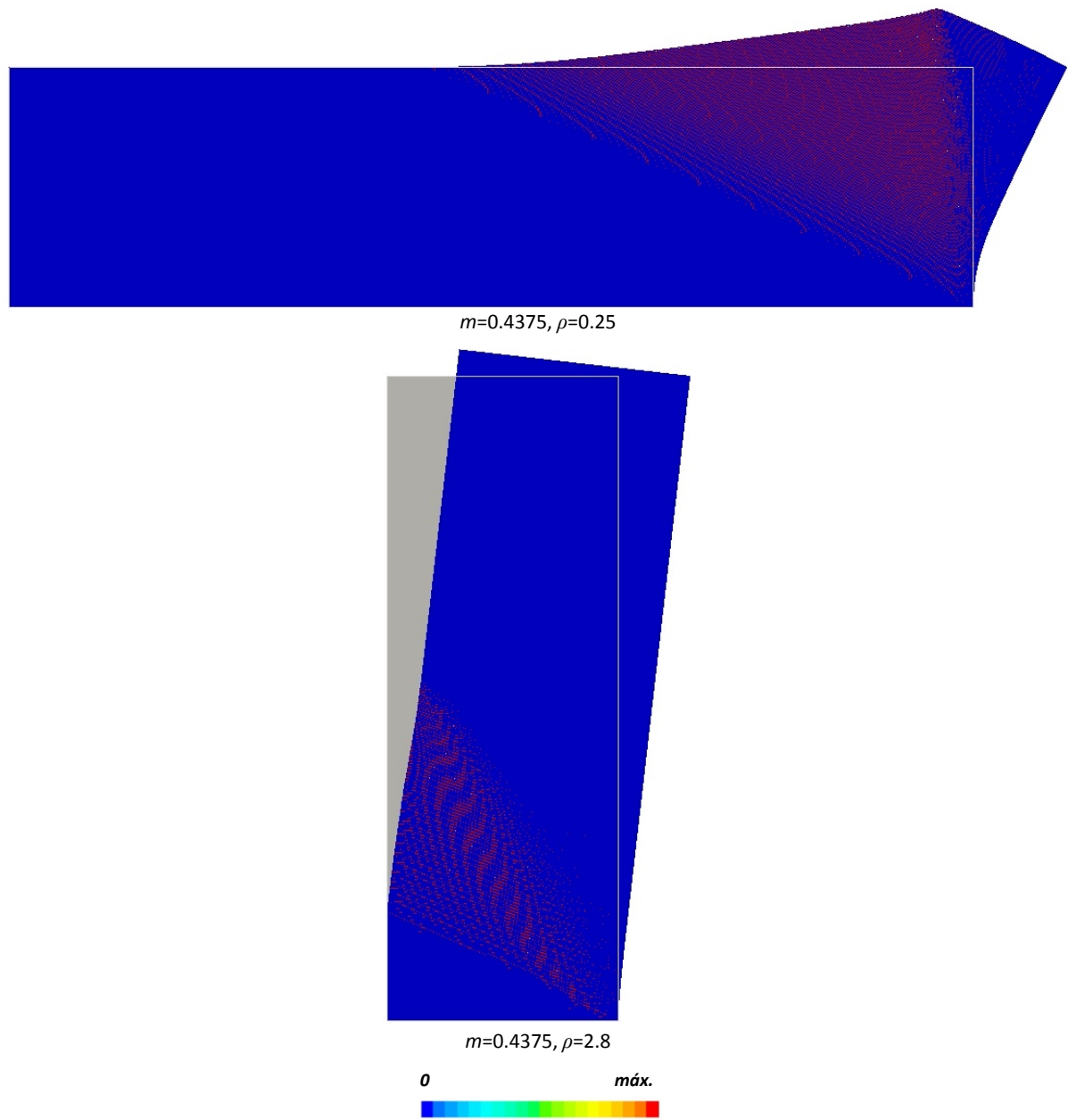


FIGURA 5.14 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d, para o caso de $m=0.4375$ nos pontos $\rho=0.25$ e 2.8 do exemplo 1

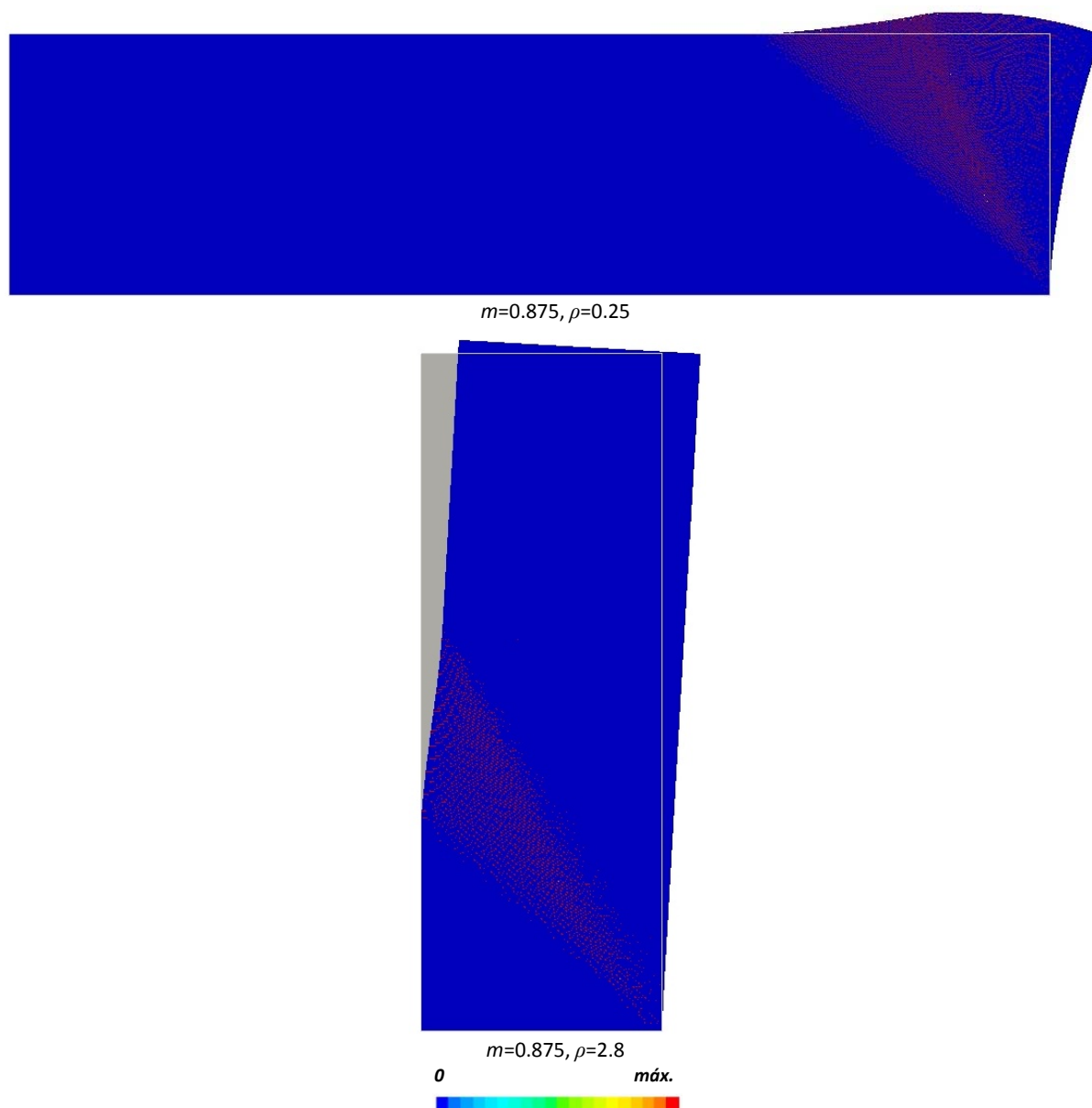


FIGURA 5.15 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d, para o caso de $m=0.875$ nos pontos $\rho=0.25$ e 2.8 do exemplo 1

5.2.1.1.5 Discussão dos resultados

Começando pela observação, tanto do desenvolvimento dos gráficos da Figura 5.12 e da Figura 5.13, bem como dos resultados apresentados na Figura 5.14 e na Figura 5.15, conclui-se que:

- Tanto os resultados experimentais como os teóricos mostram que a estabilidade da estrutura é uma função decrescente com a esbelteza (caracterizada pelo factor adimensional ρ) porque se torna cada vez mais fácil de derrubar a parede devido ao tipo de rotura mudar em termos macroscópicos de deslizamento para rotação em torno de um ponto;
- Quanto menor o valor da “esbelteza” do tijolo (m):
 - Maior a interligação entre os tijolos, logo a fenda de rotura forma-se para um ângulo mais plano, o que provoca o aumento da carga de colapso da estrutura;

- Mais sensível será a estrutura à esbelteza global, ρ , (menor será o patamar e maior será o declive do decréscimo da carga de colapso), porque como a estrutura é mais resistente, qualquer alteração da sua forma influenciará significativamente a carga de colapso.

Em seguida comparam-se os resultados obtidos pelas estimativas teóricas (com maior ênfase para os obtidos pelo SUBLIM3d) com os ensaios experimentais (Figura 5.12 e Figura 5.13):

- Para todos os valores de esbelteza global da Figura 5.12 e apenas para alguns valores de esbelteza global reduzida ($\rho \leq 0.5$) da Figura 5.13, observa-se que os valores teóricos obtidos pelo SUBLIM3d são inferiores aos valores experimentais, esta diferença pode ser justificada pelo "efeito da escala", isto é, quanto menor o modelo ensaiado, menor será o número de juntas por tijolo (menos fragmentado se encontrará a alvenaria), logo maior poderá ser a carga de colapso. Mas este efeito é também consideravelmente acentuado pela consideração dos tijolos como elementos rígidos (como se verifica neste exemplo), logo considerando que os tijolos exibam parâmetros finitos de resistência é esperado que não apresente a mesma relevância [12];
- Em alguns casos, torna-se questionável a comparação dos resultados teóricos, com os experimentais, devido a que alguns ensaios experimentais foram realizados com um número reduzido de fiadas [12];
- Para o caso de $m=0.875$, observa-se que os valores teóricos obtidos pelo SUBLIM3d apresentam uma maior semelhança aos resultados experimentais que os obtidos por [12];
- Do ponto de vista da análise limite, conclui-se de uma maneira geral que para os dois gráficos os resultados obtidos pelo SUBLIM3d aproximam-se mais do verdadeiro percurso do multiplicador de colapso de uma alvenaria homogeneizada do que os resultados obtidos por [12], mas continua na mesma a fornecer valores contra a segurança da alvenaria. Este melhoramento conduz às seguintes implicações na solução teórica obtida pelo SUBLIM3d:
 - Diminuição do patamar inicial;
 - Transição mais suave entre o patamar inicial e a zona posterior;
 - Redução do declive, na fase decrescente;
 - Diminuição da estabilidade da estrutura.

Apresentam-se agora os valores principais sobre o melhoramento da solução:

- Para o caso de $m=0.4375$, o melhoramento da solução apresenta como valor máximo 19.5% ($\rho=0.90$);
- Para o caso de $m=0.875$ o melhoramento da solução apresenta como valor máximo 5.2% ($\rho=1.35$).

De seguida, para se confirmar o erro máximo óptimo adoptado (2%), recalculou-se para cada caso de m , cinco alvenarias ($\rho=0.60$, $\rho=1.20$, $\rho=1.81$, $\rho=2.41$, $\rho=3.00$) com o dobro da proporção, utilizando o mesmo raciocínio que o apresentado no processo de alcançar a homogeneização de resultados (referente ao tópico que trata da determinação do número de fiadas que constituem a alvenaria). Conclui-se que o erro máximo óptimo deste exemplo, para o caso de $m=0.4375$ é de 5.4% ($\rho=1.81$) e para o caso de $m=0.875$ é de 2.2% ($\rho=1.81$), não se obtendo erros da mesma ordem de grandeza para qual a geometria da alvenaria foi definida.

Por último, apresentam-se algumas implicações devido a se considerar os tijolos como elementos rígidos:

- As juntas neste exemplo desempenham o papel decisivo no colapso da alvenaria;
- Os tijolos apresentam apenas deslocamentos constantes, logo os elementos de junta considerados apresentam deslocamentos de 1ª ordem (constantes ou lineares) que são conseguidos com apenas os elementos considerados no presente trabalho (dois), o que implica que o aumento do refinamento nas juntas não iria melhorar o resultado obtido pelo SUBLIM3d.

5.2.1.2 Exemplo 2

Este exemplo foi retirado do trabalho de D. Oliveira [27] que testou sete alvenarias simples sujeitando-as a diferentes níveis de carregamento vertical constante com um carregamento horizontal que é aumentado monotonicamente.

5.2.1.2.1 Definição

Para a definição da parede de corte apresentam-se de seguida os dados importantes fornecidos pelos artigos [27], [28] e [29], em relação a:

- **Propriedades da alvenaria (ver Figura 5.16):**

A estrutura deste exemplo corresponde a uma alvenaria definida por 5 blocos (20 x 10 x 20 cm) em cada uma das 10 fiadas, correspondendo dimensionalmente a 100 x 100 x 20 cm. Restringe-se o deslocamento horizontal na base não só através do encastramento de toda a base da parede, mas também devido a um calço colocado no primeiro tijolo da primeira fiada. Para cada parede modelo (definida pelo tipo de carregamento), definiram-se duas modalidades (ver Tabela 5.5): na primeira modalidade (.1) não se colocou qualquer material de interligação de elementos; na segunda modalidade (.2) não se colocou qualquer material de interligação entre os blocos mas colocaram-se duas camadas de argamassa de nivelamento, uma na ligação da base com a primeira fiada e outra na ligação da última fiada com a viga de betão reforçado (160 x 20 x 20 cm). Utilizou-se esta viga para aplicar a força vertical mais eficientemente, isto é, para aplicar a força vertical de forma distribuída por toda a largura da parede.

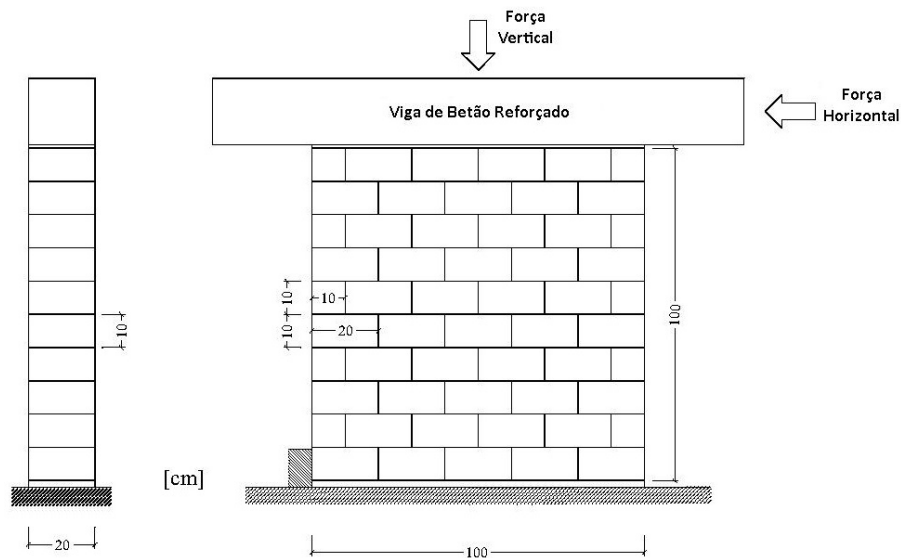


FIGURA 5.16 – Geometria da alvenaria de pedra e esquema de carregamento (adaptado de [27])

• **Propriedades dos materiais:**

Neste caso a parede de alvenaria é constituída pelos seguintes elementos: Blocos de pedra, Viga de Betão Reforçado, interfaces bloco/bloco e argamassa de nivelamento. Destes elementos são fornecidas as seguintes propriedades: Os blocos apresentam uma resistência à compressão média de 57.1 MPa e uma resistência à tracção média de 3.72 MPa, por outro lado, os interfaces bloco/bloco exibem propriedades de resistência puramente atríticas ($c = 0$) sendo o ângulo de atrito dado por:

$$\varphi = \tan^{-1} 0.62 \tag{5.14}$$

e por último a argamassa de nivelamento apresenta uma resistência à compressão elevada, cerca de 50 MPa.

• **Tipo de carregamento (ver Figura 5.16):**

Cada uma das 4 paredes modelo, designadas por SW30, SW100, SW200 e SW250, é sujeita a um carregamento vertical constante (com auxílio de uma viga de aço colocada sobre a viga de betão reforçado o que conduz a uma carga adicional de 1.0 kN), indicado na Tabela 5.5, seguido da aplicação de um carregamento horizontal crescente até à ocorrência do colapso da parede de alvenaria.

TABELA 5.5 – Carregamento vertical aplicado a cada parede modelo do exemplo 2

| Parede modelo | Modalidade | Carregamento vertical (kN) | Tensão normal (MPa) |
|---------------|------------|----------------------------|---------------------|
| SW30 | SW30.1 | 30 | 0.15 |
| | SW30.2 | | |
| SW100 | SW100.1 | 100 | 0.50 |
| | SW100.2 | | |
| SW200 | SW200.1 | 200 | 1.00 |
| | SW200.2 | | |
| SW250 | SW250.1 | 250 | 1.25 |

5.2.1.2.2 Resultados experimentais/Propostas

Os resultados experimentais existentes foram obtidos de testes realizados no Departamento de Engenharia Civil da Universidade do Minho. O mecanismo de rotura experimental para os quatro modelos de parede é apresentado na Figura 5.17,

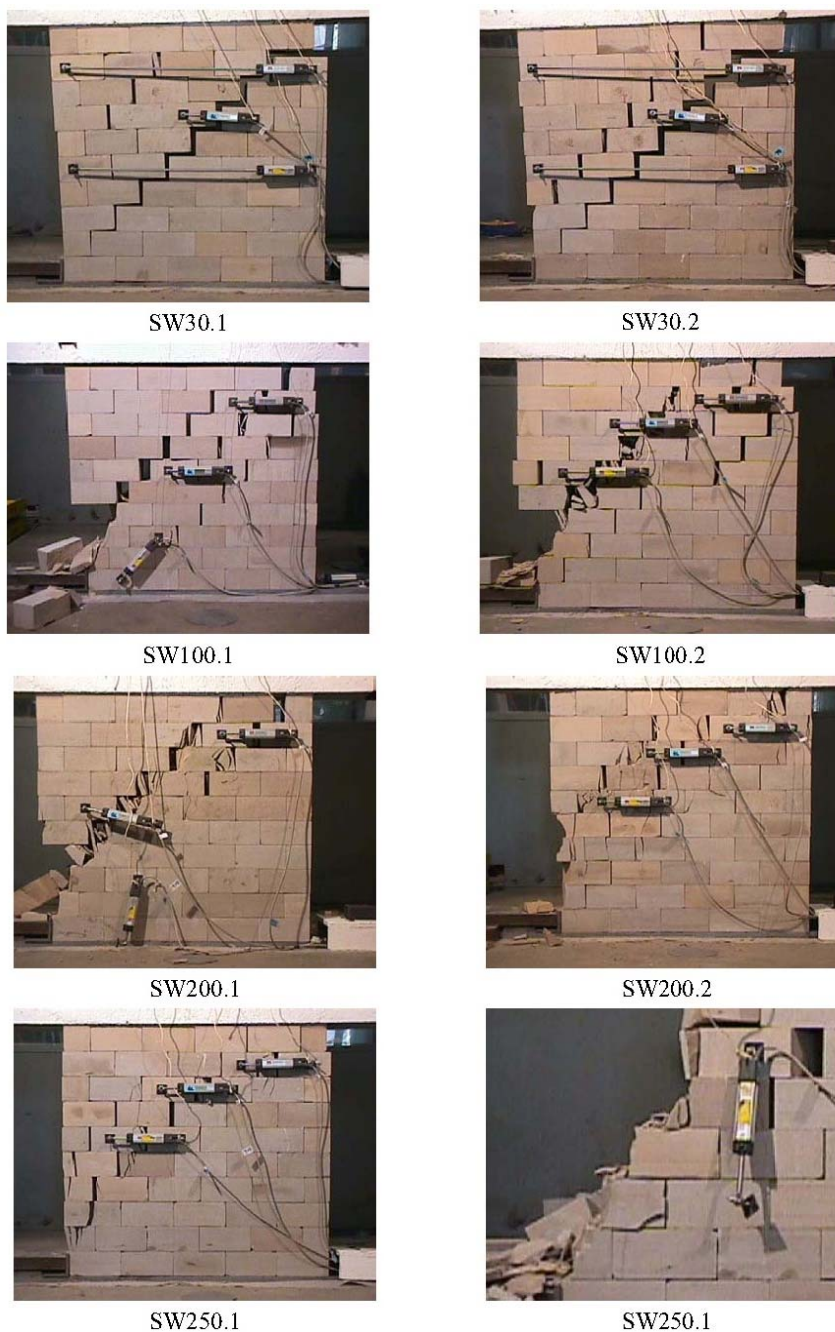


FIGURA 5.17 – Mecanismos de rotura experimental [27]

na Figura 5.23 à Figura 5.26 apresentam-se as curvas experimentais de carregamento em função do deslocamento horizontal da viga e na Tabela 5.6 apresentam-se as forças horizontais máximas aplicadas à estrutura.

Apresentam-se agora resumidamente as várias propostas existentes na literatura sobre este exemplo, onde as representações gráficas das forças horizontais de cedência são apresentadas na Figura 5.23 até à Figura 5.26 e os respectivos valores numéricos são apresentados na Tabela 5.6.

- **Análise limite [17]:**

Esta ferramenta de cálculo considera a modelação micro simplificada na modelação da alvenaria, optando por considerar os materiais como perfeitamente plásticos e obedecendo às regras de escoamento não associado (dado para um ângulo de dilatação nulo). Baseia-se no teorema cinemático do método da análise limite para a resolução do problema e considera uma superfície de cedência composta tanto pelo critério de mecanismo de esmagamento como pelo critério de Mohr-Coulomb. Esta análise considera duas hipóteses, uma que corresponde a limitar as tensões de compressão nos interfaces bloco/bloco e uma segunda que impõe que a alvenaria não tem qualquer resistência à tracção. Nesta proposta definem-se dois tipos de análises:

- Análise limite 1 - considera que todos os tijolos são modelados como elementos rígidos;
- Análise limite 2 - considera que todos os tijolos são modelados como elementos rígidos, excepto o tijolo mais à esquerda da 3 fiada (contando o número de fiadas a partir da base). Este tipo de análise foi criado devido à observação dos modos de rotura experimentais da parede SW200, ver Figura 5.17, que levou à consideração da fendilhação no bloco especificado.

Como complemento desta proposta apresentam-se na Figura 5.18 os modos de rotura obtidos para a parede SW200.

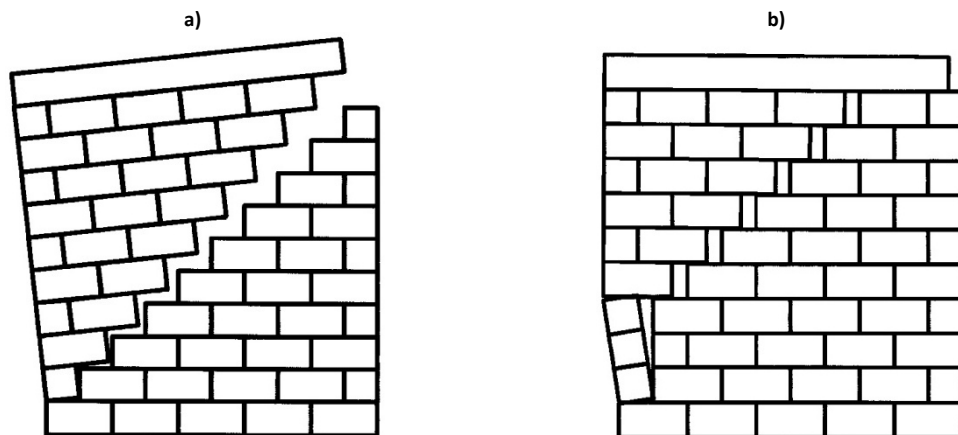


FIGURA 5.18 – Modos de rotura obtidos para parede SW200 pela: a) Análise limite 1 b) Análise limite 2 [17]

- **Análise MEF ([30] e [31]):**

Esta ferramenta de cálculo considera a modelação micro simplificada na modelação da alvenaria, optando por considerar os tijolos como um material rígido e as juntas como um material plástico. Baseia-se no teorema cinemático do método da análise limite para a resolução do problema e considera a superfície de cedência proposta por P. B. Lourenço e J. G. Rots (modelo de interface composto) [32], ver Figura 2.21. Pela observação experimental da Figura 5.17, considerou-se impossível a fendilhação dos blocos para as paredes SW30 e SW100, por outro lado para as paredes SW200 e SW250 considerou-se potenciais falhas no meio dos blocos.

A representação gráfica das forças horizontais de cedência desta proposta é obtida através da convergência assintótica da solução. Como complemento desta proposta apresenta-se na Figura 5.19 o modo de rotura obtido para a parede SW30.

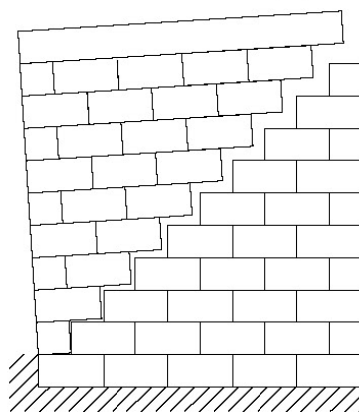


FIGURA 5.19 – Modo de rotura obtido para a parede SW30 pela Análise MEF [31]

- **Envelope Bi-linear [30]:**

Esta ferramenta de cálculo consiste num envelope bi-linear (equação (5.15)) que foi definido de acordo com o critério de Mann e Muller [33]. No primeiro ramo define-se um mecanismo de corpo rígido, por outro lado, no segundo ramo, define-se um modo de rotura misto (que inclui deslizamento, fendilhação e esmagamento dos blocos). O primeiro ramo é obtido por cálculos estáticos simples (devido ao carregamento vertical ser reduzido) e o segundo ramo é obtido por uma regressão linear, obtendo-se,

$$\begin{cases} H = 2.06 + 0.5V & V \leq \frac{163}{3} \text{ KN} \\ H = 11.84 + 0.32V & V > \frac{163}{3} \text{ KN} \end{cases} \quad (5.15)$$

que corresponde à estimativa da carga de colapso desta proposta.

- **Método simplificado de análise [30]:**

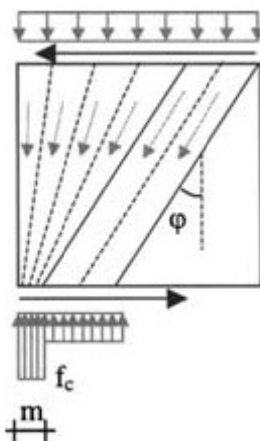


FIGURA 5.20 – Modelo proposto pelo método simplificado de análise descrevendo o equilíbrio na cedência [30]

Esta proposta corresponde à conversão do exemplo na cedência para um mecanismo simples, consistindo num contínuo de escoras diagonais distribuídas parcialmente como um leque e parcialmente em paralelo, ver Figura 5.20. Neste mecanismo o máximo declive (com a vertical) das escoras é limitado pelo ângulo de atrito do interface bloco/bloco, enquanto que a compressão vertical máxima na base do leque (dimensão m na Figura 5.20) é limitada pela

resistência média à compressão dos tijolos (f_c). Pelas condições de equilíbrio obtém-se a seguinte expressão para a estimativa da força horizontal de cedência (H):

$$H = V \tan \varphi \left(1 - \frac{h}{2b} \tan \varphi \left(\frac{1}{1-\nu} \right) \right) \quad (5.16)$$

sendo,

$$\nu = \frac{m}{b} = \frac{V}{tb f_c} \quad (5.17)$$

em que V corresponde à força vertical total aplicada à alvenaria e b , h , t correspondem à largura, altura e espessura da parede, respectivamente.

- **Modelo de Carol e López [34]:**

Nesta proposta as paredes foram simuladas numericamente usando o modelo de análise proposto por Carol e López [35]. Esta ferramenta de cálculo baseia-se na elasto-plasticidade (considerando o amolecimento) e encontra-se formulada em termos de deslocamentos relativos. A superfície de cedência usada por este modelo para os interfaces bloco/bloco foi uma superfície de cedência hiperbólica que tende assintoticamente para a superfície de cedência de Mohr-Coulomb (ver Figura 5.21).

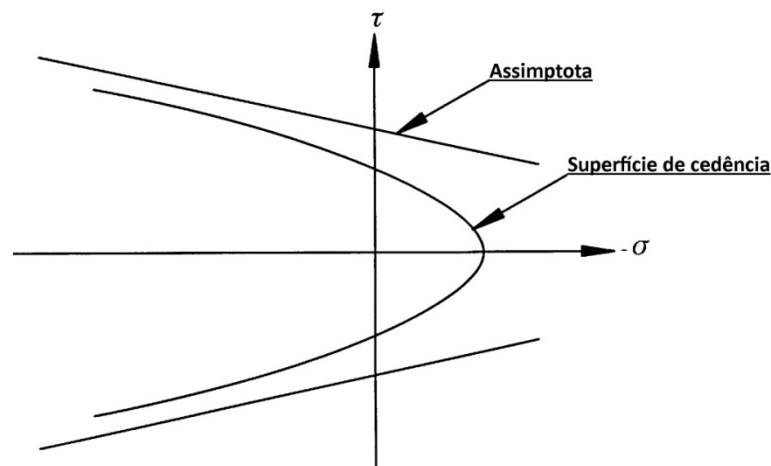


FIGURA 5.21 – Superfície de cedência hiperbólica

Nesta proposta inserem-se juntas verticais nos blocos, para permitir a ocorrência das falhas transversais nestes elementos.

5.2.1.2.3 Simplificações/Considerações

O objectivo deste exemplo era a possibilidade de comparar tanto os resultados experimentais obtidos por D. Oliveira [27] como os resultados obtidos pelas várias propostas encontradas na literatura com os resultados obtidos pelo SUBLIM3d. Este objectivo, para ser alcançado correctamente foi necessário admitir o seguinte conjunto de hipóteses:

- **Em relação às propriedades da alvenaria:**
 - Apenas se executaram as paredes modelo para a primeira modalidade (não se coloca qualquer material de interligação de elementos);
 - Inseriram-se as dimensões dos tijolos em metros;
 - Consideraram-se os tijolos como elementos rígidos, que corresponde à hipótese assumida pela maioria das propostas;
 - Considera-se que a viga de betão reforçado (lintel) apresenta como dimensões 1 x 0.1 x 0.2 m e que foi modelada por elementos rígidos;
- **Em relação às propriedades dos materiais:**
 - Embora os blocos de pedra sejam modelados por elementos rígidos considera-se, devido ao enunciado no segundo tópico do capítulo 5.1.1, que estes elementos foram definidos pelo critério de cedência de Mohr – Coulomb. Para definir os parâmetros deste critério seguiram-se as seguintes etapas, ver Figura 5.22:

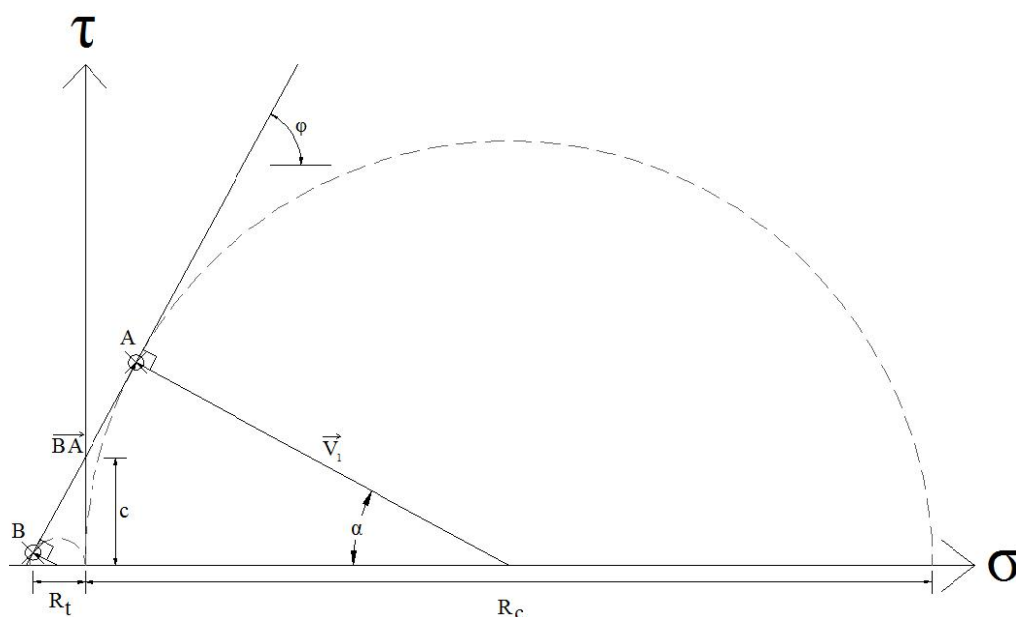


FIGURA 5.22 – Parâmetros do critério de cedência de Mohr - Coulomb

- I. Representa-se graficamente os ensaios que levaram à determinação dos valores da resistência à compressão e à tracção média.
- II. Definiram-se as coordenadas do Ponto A e B:

$$A = \frac{R_c}{2} (1 - \cos \alpha, \sin \alpha) \quad (5.18)$$

$$B = -\frac{R_t}{2} (1 + \cos \alpha, -\sin \alpha) \quad (5.19)$$

- III. Determinaram-se as coordenadas dos vectores BA e V_1 :

$$\overrightarrow{BA} = (A_\sigma - B_\sigma, A_\tau - B_\tau) \quad (5.20)$$

$$\overrightarrow{V_1} = \left(A_\sigma - \frac{R_c}{2}, A_\tau \right) \quad (5.21)$$

- IV. Tendo em consideração a condição de normalidade dos vectores referidos no ponto III,

$$\overrightarrow{BA}: \overrightarrow{V}_1 = 0 \leftrightarrow (BA_\sigma \times V_{1\sigma}) + (BA_\tau \times V_{1\tau}) = 0 \quad (5.22)$$

determina-se o valor do ângulo α ,

$$\alpha = 28.56^\circ \quad (5.23)$$

V. Sabendo que,

$$\varphi = 90^\circ - \alpha \leftrightarrow \varphi = 61.44^\circ \quad (5.24)$$

determina-se o valor do ângulo φ .

VI. Substitui-se as equações (5.24) e (5.18) na equação (2.40) e resolve-se em ordem à coesão, obtendo-se,

$$c = 7.27 \text{ Mpa} \quad (5.25)$$

- Embora o lintel seja modelado por elementos rígidos considera-se, devido ao enunciado no segundo tópico do capítulo 5.1.1, que o lintel também foi definido pelo critério de cedência de Mohr - Coulomb sendo definido por $c=10$ MPa e $\varphi=65^\circ$ (correspondem a parâmetros irreais, tendo-se optado por estes valores para que a rotura nunca se dê por este elemento).

- **Em relação ao tipo de carregamento:**

- Converteram-se as cargas aplicadas em tensões, σ , através da seguinte equação,

$$\sigma \text{ (Mpa)} = \frac{\text{carga (KN)}}{1000 \times b \times t} \quad (5.26)$$

- Considera-se que a força horizontal aplicada na parede de alvenaria corresponde a uma tensão de corte distribuída em toda a largura do lintel;
- Considera-se que o peso específico equivalente e distribuído da viga de betão reforçado (*p.e.e.d.v.b.r.*) é obtido pelo seguinte raciocínio:
 - I. Considera-se que o $\gamma_{B.R.} = 25 \text{ KN/m}^3$ (peso específico do betão reforçado);
 - II. Calcula-se o peso específico equivalente do betão reforçado:

$$\gamma_{E.B.R.} = \frac{\gamma_{B.R.} \times V_{viga}^{real}}{V_{viga}^{considerado}} = 80 \text{ KN/m}^3 \quad (5.27)$$

onde V_{viga}^{real} e $V_{viga}^{considerado}$, correspondem respectivamente ao volume real e considerado da viga de betão reforçado;

- III. Calcula-se o valor pretendido através da seguinte equação,

$$p.e.e.d.v.b.r. \text{ (Mpa)} = \frac{\gamma_{E.B.R.}}{1000} \times t \quad (5.28)$$

- **Em relação aos parâmetros opcionais:**

- Considera-se que a solução obtida pelo SUBLIM3d é alcançada pela precisão (1×10^{-6});
- Considera-se que a alteração ao parâmetro de penalidade inicial é igual a 0.01 para a parede SW30 e igual a 0.1 para a parede SW250, porque estes valores permitem que a solução seja boa e que convirja rapidamente.

5.2.1.2.4 Resultados SUBLIM3d

Os resultados obtidos pelo SUBLIM3d (tendo em consideração o capítulo 5.2.1.2.3) para as paredes SW30, SW100, SW200 e SW250 apresentam-se de forma gráfica na Figura 5.23, na Figura 5.24, na Figura 5.25 e na Figura 5.26, respectivamente.

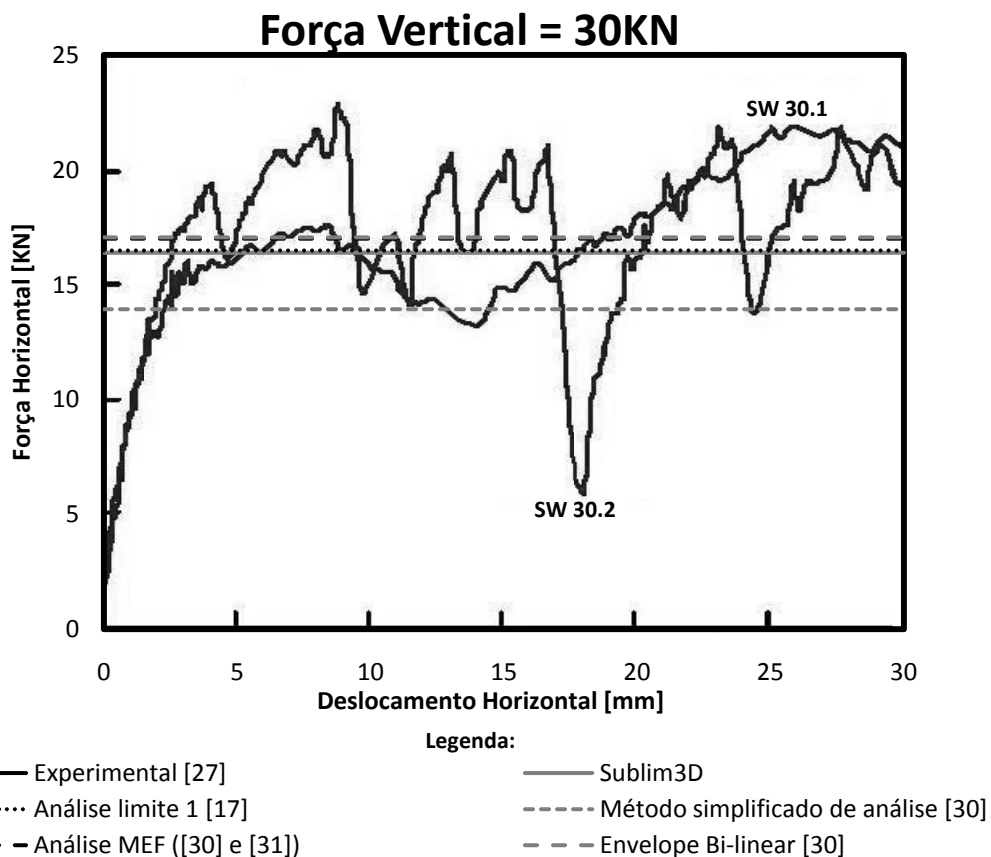


FIGURA 5.23 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas com as curvas de carregamento - deslocamento experimentais da parede de corte SW30

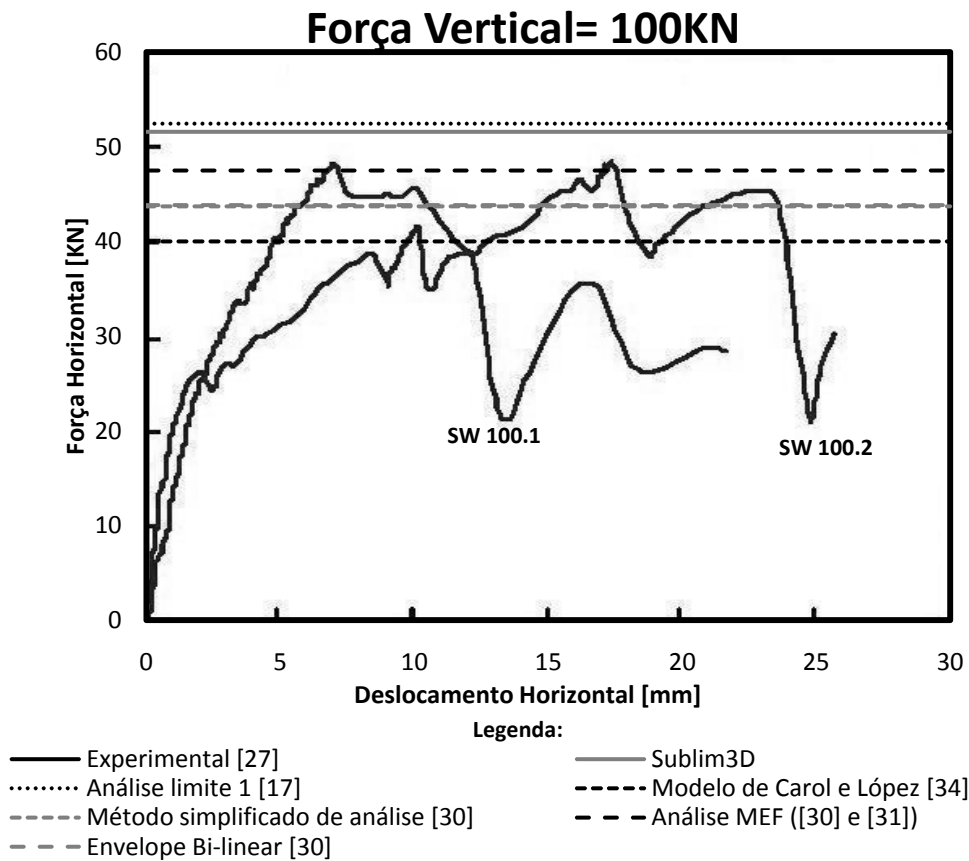


FIGURA 5.24 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas com as curvas de carregamento – deslocamento experimentais da parede SW100

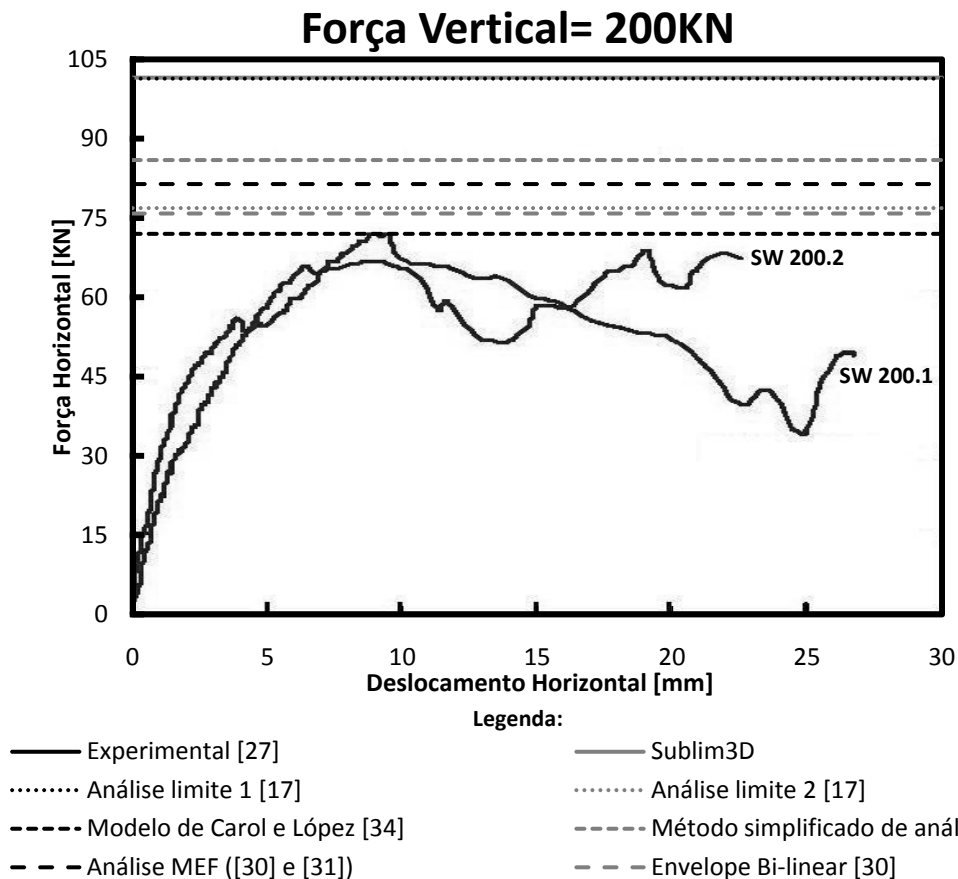


FIGURA 5.25 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas com as curvas de carregamento – deslocamento experimentais da parede de corte SW200

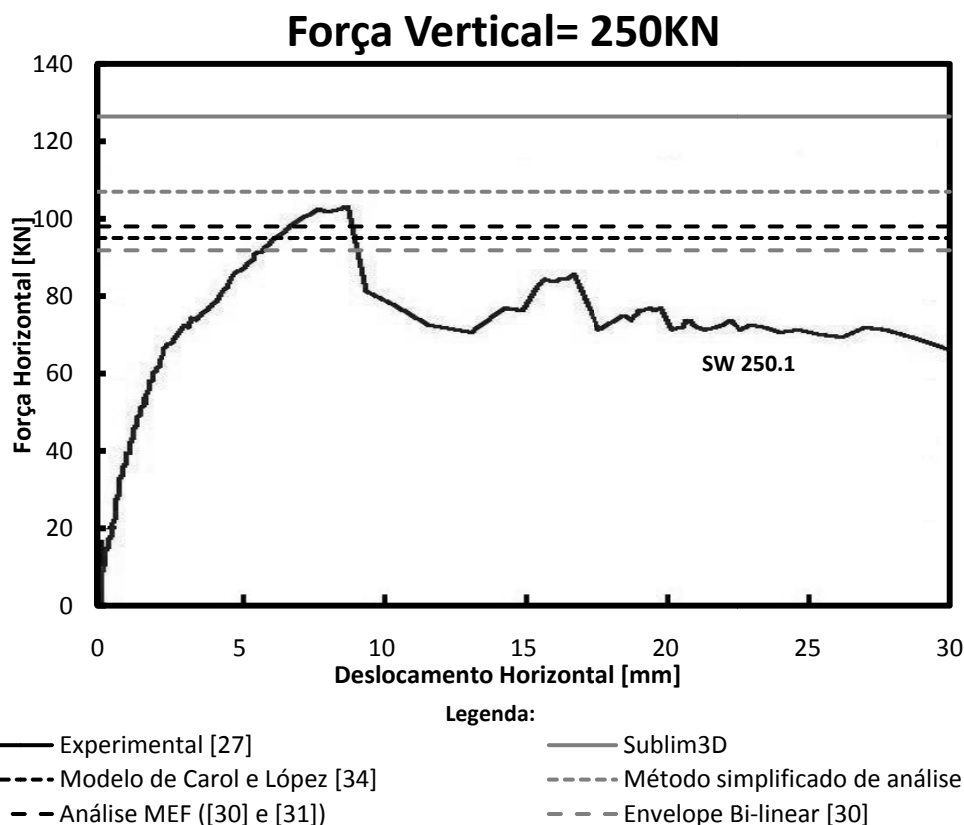


FIGURA 5.26 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas com a curva de carregamento – deslocamento experimental da parede de corte SW250

Na Tabela 5.6 apresentam-se numericamente os resultados obtidos pelo SUBLIM3d para as diversas paredes.

TABELA 5.6 – Comparação da carga de colapso[KN] obtida experimentalmente com a obtida pelas estimativas teóricas

| Paredes | Experimental [27] | | | Estimativas teóricas | | | | | | |
|---------|-------------------|----|-------|----------------------|---------------------|----------------|------------------------------|-------------------------------------|---------------------------|-------------------------|
| | | | | SUBLIM3d | Análise limite [17] | | Modelo de Carol e López [34] | Método simplificado de análise [30] | Análise MEF ([30] e [31]) | Envelope Bi-linear [30] |
| | 1 | 2 | Média | | 1 | 2 | | | | |
| SW30 | 22 | 23 | 22.5 | 16.4 (-27.1%) | 16.5 (-26.7%) | - | - | 13.9 (-38.2%) | 17 (-24.4%) | 17.1 (-24%) |
| SW100 | 42 | 49 | 45.5 | 51.6 (13.4%) | 52.5 (15.4%) | - | 40 (-12.1%) | 43.7 (-4%) | 47.5 (4.4%) | 43.8 (-3.7%) |
| SW200 | 72 | 69 | 70.5 | 101.5 (44%) | 101.4 (43.8%) | 76.9 (9.1%) | 72 (2.1%) | 86 (22%) | 81.4 (15.5%) | 75.8 (7.5%) |
| SW250 | 102 | - | - | 126.4 (23.9%) | - | - | 95 (-6.9%) | 107 (4.9%) | 98 (-3.9%) | 91.8 (-10%) |

Nota: Os valores entre parêntesis representam o erro (mesmo raciocínio da equação (5.13)) das estimativas teóricas em relação à média dos valores experimentais (excepto para a parede SW250).

Os resultados teóricos obtidos pelo SUBLIM3d, apresentados nestas figuras e tabela, são obtidos através do raciocínio inverso apresentado no capítulo 5.2.1.2.3 (na equação (5.26), definida em relação ao tipo de carregamento).

Observa-se a partir do ficheiro de cálculo, que a convergência da solução para cada parede foi muito rápida, apresentando um tempo de execução dos cálculos em computação sequencial inferior a 19 segundos, que é notável para um problema não linear com possibilidades múltiplas de rotura.

Capítulo 5. Aplicações Numéricas

De seguida, apresentam-se na Tabela 5.7 as principais características da malha utilizada para as paredes do exemplo 2, designadamente, o tipo e o número de elementos associado à malha, bem como o número de graus de liberdade globais e locais.

TABELA 5.7 – Principais características da malha de cada parede do exemplo 2

| Paredes | Tipo de elementos | Número de elementos | DOF | |
|---------------------------|-------------------|---------------------|---------|--------|
| | | | Globais | Locais |
| SW30, SW100, SW200, SW250 | Linear | 730 | 794 | 1460 |

Como complemento, para as paredes de corte SW30, SW100, SW200 e SW250 representa-se respectivamente na Figura 5.27, na Figura 5.28, na Figura 5.29 e na Figura 5.30 a distribuição da dissipação plástica nos elementos e a configuração do mecanismo de colapso.

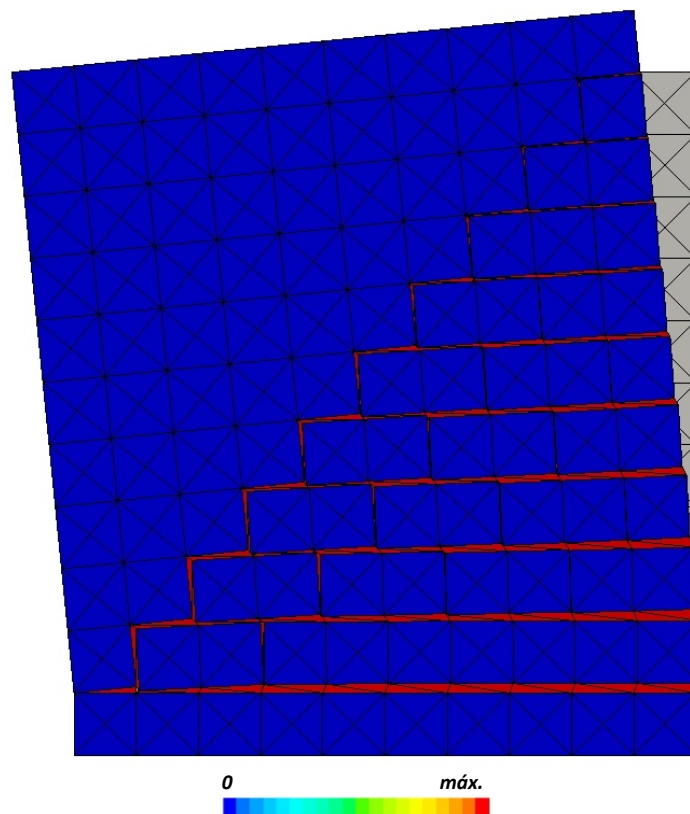


FIGURA 5.27 – Dissipação plástica e malha deformada obtida pelo SUBLIM3d para a parede de corte SW30 do exemplo 2

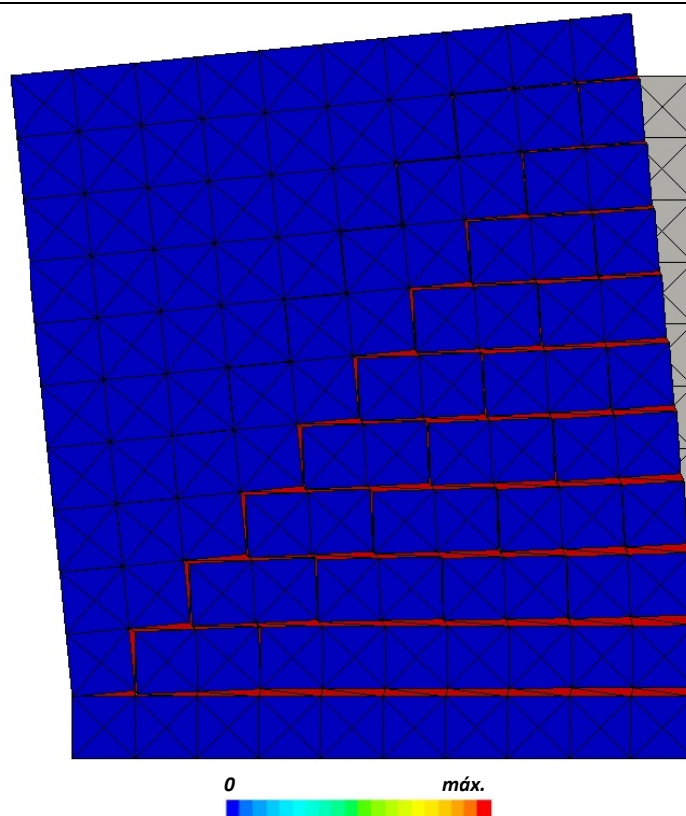


FIGURA 5.28 – Dissipação plástica e malha deformada obtida pelo SUBLIM3d para a parede de corte SW100 do exemplo2

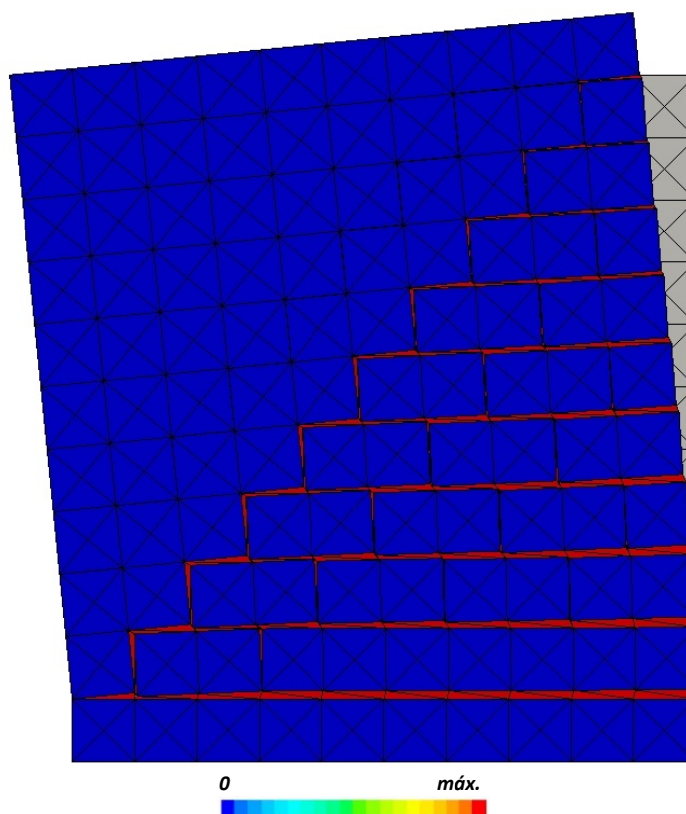


FIGURA 5.29 – Dissipação plástica e malha deformada obtida pelo SUBLIM3d para a parede de corte SW200 do exemplo2

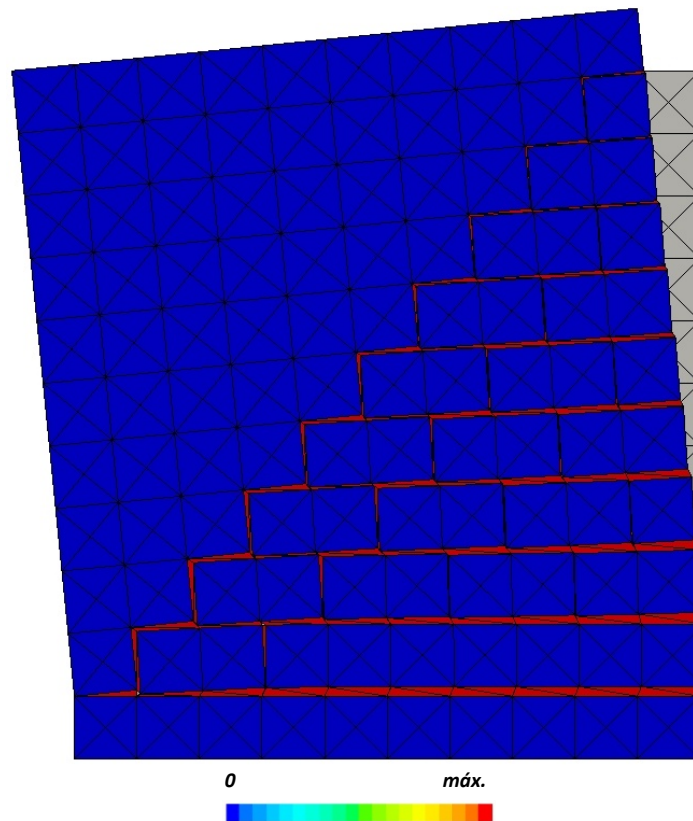


FIGURA 5.30 – Dissipação plástica e malha deformada obtida pelo SUBLIM3d para a parede de corte SW250 do exemplo2

5.2.1.2.5 Discussão dos resultados

Começa-se pela análise dos resultados apresentados (experimentais e teóricos) para cada uma das paredes estudadas:

- **Parede SW30:**

- Pela observação da Figura 5.23 e da Tabela 5.6, conclui-se que a proposta que mais se aproxima da média dos resultados experimentais é o envelope Bi-linear [30]. A proposta do SUBLIM3d aparece em quarto lugar, com uma diferença em relação à melhor solução de 0.7KN (3.1%), correspondendo a uma diferença pouco significativa, o que leva a dizer que o resultado obtido pelo SUBLIM3d corresponde a uma boa estimativa da carga de colapso experimental. Nesta parede todas as propostas apresentadas exibem valores inferiores aos observados experimentalmente, conduzindo assim à obtenção de valores a favor da segurança;
- Pela observação da Figura 5.17, da Figura 5.19 e da Figura 5.27, conclui-se que o mecanismo de colapso obtido experimentalmente é muito semelhante ao obtido pela aproximação numérica (Análise de MEF [31]), nomeadamente, uma progressão gradual de separação dos blocos ao longo da diagonal de compressão, provocada pela rotação da parte superior em relação à base da parede, não se observando praticamente qualquer tipo de esmagamento ou fendilhação dos blocos. Por outro lado, o mecanismo de rotura obtido pelo SUBLIM3d também é semelhante ao verificado experimentalmente, contudo também apresenta uma separação dos tijolos na parte inferior decrescente com o aumento da altura.

- **Parede SW100:**

- Pela observação da Figura 5.24 e da Tabela 5.6, conclui-se que a proposta que mais se aproxima da média dos resultados experimentais, majorando-a, é a Análise MEF ([30] e [31]). A proposta do SUBLIM3d aparece em segundo lugar, com uma diferença em relação à melhor solução de 4.1KN (9%), correspondendo mesmo assim a uma diferença pouco significativa, o que leva a dizer que o resultado obtido pelo SUBLIM3d corresponde a uma boa estimativa da carga de colapso experimental. Nesta parede existem tanto propostas que apresentam valores superiores como inferiores aos valores observados experimentalmente;
- Pela observação da Figura 5.17 e da Figura 5.28 conclui-se que o mecanismo de colapso obtido experimentalmente e o obtido pelo SUBLIM3d é relativamente semelhante ao descrito para a parede SW30, mas os fenómenos de esmagamento e fendilhação dos blocos de pedra foram neste caso observados no teste e observou-se também que existem duas diagonais de compressão. Como no caso da parede SW30 o mecanismo de rotura obtido pelo SUBLIM3d também apresenta uma separação dos tijolos na parte inferior decrescente com o aumento da altura;
- Os resultados obtidos pelo SUBLIM3d poderiam corresponder a uma melhor estimativa da carga de colapso experimental caso se considerassem as deformações dos tijolos. A diferença obtida não seria provavelmente muito significativa devido à reduzida proporção de fenómenos de esmagamento e fendilhação nos blocos de pedra (ver Figura 5.17).

- **Parede SW200:**

- Pela observação da Figura 5.25 e da Tabela 5.6, conclui-se que a proposta que mais se aproxima da média dos resultados experimentais, majorando-o, é o Modelo de Carol e López [34]. A proposta do SUBLIM3d aparece em último lugar, com uma diferença em relação à melhor solução de 29.5KN (41.9%), correspondendo a uma diferença significativa, o que leva a dizer que o resultado obtido pelo SUBLIM3d corresponde a uma má estimativa da carga de colapso experimental. Nesta parede todas as propostas apresentadas apresentam valores superiores aos observados experimentalmente;
- Pela observação da Figura 5.17, da Figura 5.18 e da Figura 5.29, conclui-se que o mecanismo de colapso obtido experimentalmente é muito semelhante ao obtido pela aproximação numérica (Análise limite 2 [17]), nomeadamente, uma separação constante dos blocos ao longo da diagonal de compressão, provocada pelo deslizamento da parte superior sobre as juntas horizontais, ocorrendo um esmagamento severo dos blocos de pedra, acompanhado com fendilhação ao longo da diagonal de compressão. Por outro lado, o mecanismo de rotura obtido pelo SUBLIM3d (semelhante ao da Análise limite 1 [17]) não corresponde ao obtido experimentalmente;
- Os resultados obtidos (carga e mecanismo de colapso) pelo SUBLIM3d poderiam corresponder a uma melhor estimativa da carga de colapso experimental caso se considerassem as deformações dos tijolos. A diferença obtida poderia ser significativa devido à elevada proporção de fenómenos de esmagamento e fendilhação nos blocos de pedra (ver Figura 5.17).

- **Parede SW250:**

- Pela observação da Figura 5.26 e da Tabela 5.6, conclui-se que a proposta que mais se aproxima do resultado experimental, majorando-o, é o Método simplificado de análise [30]. A proposta do SUBLIM3d aparece em segundo lugar, com uma diferença em relação à melhor solução de 19.4KN (19%), correspondendo a uma diferença significativa, o que leva a dizer que o resultado obtido pelo SUBLIM3d corresponde a uma média estimativa da carga de colapso experimental. Nesta parede existem tanto propostas que apresentam valores superiores como inferiores aos valores observados experimentalmente;
- Pela observação da Figura 5.17 e da Figura 5.30 conclui-se que o mecanismo de colapso obtido experimentalmente é semelhante ao descrito para a parede SW200, mas os fenómenos de esmagamento e fendilhação foram neste caso mais severos e também se observou que existe encurvadura da parede. Logo conclui-se que este mecanismo de colapso não é de todo semelhante ao obtido pela aproximação numérica (SUBLIM3d);
- Os resultados obtidos (carga e mecanismo de colapso) pelo SUBLIM3d poderiam corresponder a uma melhor estimativa da carga de colapso experimental caso se considerassem as deformações dos tijolos. A diferença obtida não seria tão significativa como na parede SW200 porque surgem nesta parede fenómenos de encurvadura lateral (que não se implementaram) embora exista uma elevada proporção de fenómenos de esmagamento e fendilhação nos blocos de pedra (ver Figura 5.17).

Por último, apresentam-se alguns comentários da interpretação do comportamento geral das quatro paredes modelo ensaiadas:

- Comparando as duas modalidades (.1 e .2) chega-se à conclusão que não existe nenhuma diferença significativa. Este resultado era esperado porque o comportamento experimental observado é praticamente controlado pelos fenómenos que acontecem tanto na parte central como na parte superior das paredes (ver Figura 5.17);
- A falta de material de interligação promove concentrações de tensões em alguns pontos de contacto, levando à fendilhação vertical dos blocos. Este processo é mais relevante quanto maior o carregamento vertical aplicado (ver Figura 5.17);
- Pela observação da Tabela 5.6, conclui-se que a força horizontal máxima aumenta com a força vertical aplicada, como seria de esperar devido ao aumento do confinamento da parede, conduzindo também a um aumento da fragilidade da parede;
- Os diagramas que se apresentam na Figura 5.23 até à Figura 5.26 são caracterizados por dois comportamentos distintos globais. Inicialmente, as curvas exibem grande rigidez e comportamento elástico (até aproximadamente 30% da carga de pico), depois para pequenas deformações existe uma degradação contínua da tangente da rigidez. A segunda parte dos diagramas é caracterizada por uma oscilação da força horizontal provocada pelos movimentos relativos dos blocos, devido à ausência de material de interligação.

5.2.2 Exemplo de aplicação de critérios com truncatura (Exemplo 3)

Por fim, o processo de validação termina com a análise do exemplo seguinte, onde a determinação das cargas de colapso são afectadas pelas truncaturas dos critérios propostos apresentados no capítulo 3.2.2.2 e no capítulo 3.2.2.3. Estes critérios não se encontravam implementados na formulação do SUBLIM3d, servindo assim o processo de análise não só para aferir a capacidade dos modelos propostos como para validar a aplicabilidade destes critérios na determinação de cargas de colapso de sistemas de alvenaria.

Este exemplo foi proposto por A. W. Page [10, 36, 37] que analisou vários painéis de alvenaria sujeitando-os a diferentes níveis de tracção, de compressão e de tracção-compressão biaxial, obtendo-se o mais completo conjunto de dados de resistência de alvenaria carregada biaxialmente.

5.2.2.1 Definição

Para a definição dos vários painéis de alvenaria apresentam-se de seguida os dados importantes fornecidos pelos artigos [10, 36, 37], em relação a:

- **Propriedades da alvenaria (Figura 5.31):**

As alvenarias, que apresentam a forma de painéis quadrangulares, são ensaiadas para diferentes ângulos entre a junta horizontal e a tensão vertical, θ (0° , 22.5° , 45° , 67.5° , 90°).

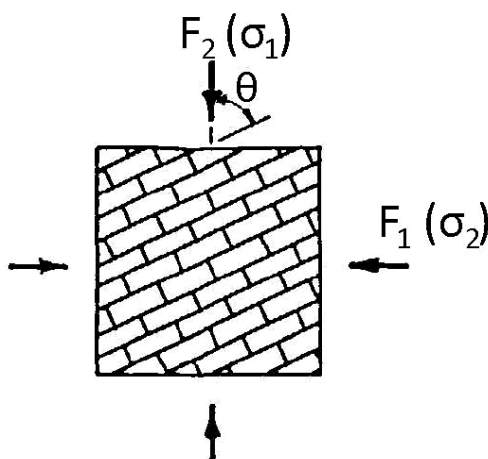


FIGURA 5.31 – Estrutura da alvenaria do exemplo 3 (adaptado de [10])

De seguida apresentam-se as propriedades específicas da alvenaria para cada ensaio:

- **Ensaio de tracção biaxial:**

Os painéis são formados por 4 tijolos rectangulares em cada uma das 10 fiadas.

- **Ensaio de compressão e tracção-compressão biaxial:**

Os painéis foram ensaiados a metade da escala, sendo formados por 3 tijolos rectangulares (que apresentam um rácio entre a largura e a espessura de 2.2) em cada uma das 8 fiadas, correspondendo dimensionalmente a 360 x 360 x 50 mm.

O ensaio de tracção-compressão biaxial no caso de $\sigma_2=0$ (tracção uniaxial) e $\theta=22.5^\circ$ foi executado utilizando um painel mais esbelto.

- **Propriedades dos materiais:**

De seguida apresentam-se as propriedades específicas dos materiais para cada ensaio:

- **Ensaio de tracção biaxial:**

As juntas são modeladas por elementos de junta que são definidos pelo critério de cedência apresentado na Figura 5.32, onde a resistência limite à tracção (F_t) e ao corte (F_s) é igual a 0.29 MPa e 0.24 MPa, respectivamente.

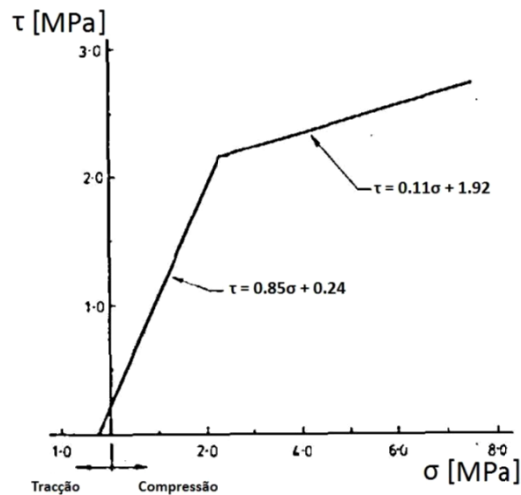


FIGURA 5.32 – Critério de cedência dos elementos de junta (adaptado de [10])

- **Ensaio de compressão biaxial:**

A junta é constituída por um traço volumétrico de 1:1:6 (cimento:cal:areia) o que lhe confere uma resistência média à compressão de 5.55 MPa. No caso dos tijolos, apenas é fornecida uma resistência média à compressão de 15.41 MPa.

- **Ensaio de tracção-compressão biaxial:**

Os materiais deste ensaio apresentam as mesmas propriedades que no ensaio de compressão biaxial, excepto no caso da resistência média à compressão da junta que assume o valor de 5.08 MPa.

- **Tipo de Carregamento (Figura 5.31):**

Os painéis são carregados proporcionalmente nas direcções das tensões principais, $F_2(\sigma_1)$ e $F_1(\sigma_2)$. De seguida apresentam-se algumas informações específicas do tipo de carregamento para cada ensaio:

- **Ensaio de tracção biaxial:**

Este tipo de ensaio é realizado aplicando as tensões principais, F_2 e F_1 , com o sentido inverso ao apresentado na Figura 5.31.

- **Ensaio de compressão biaxial:**

Este tipo de ensaio é realizado aplicando as tensões principais, σ_1 e σ_2 , com o sentido apresentado na Figura 5.31. Os painéis são sujeitos a rácios (σ_1/σ_2) de infinito (compressão uniaxial segundo a σ_1), 10, 4, 2 e 1.

○ **Ensaio de tracção-compressão biaxial:**

Este tipo de ensaio é realizado aplicando, por um lado, a tensão principal vertical, σ_1 , com o sentido inverso ao apresentado na Figura 5.31 e por outro lado aplicando, a tensão principal horizontal, σ_2 , com o sentido apresentado nessa figura. Os painéis são sujeitos a rácios ($|\sigma_2|/|\sigma_1|$) de infinito (compressão uniaxial), 30, 10, 5, 2 e 0 (tracção uniaxial).

5.2.2.2 Resultados experimentais/Propostas

No caso do ensaio de tracção biaxial, A. W. Page simulou uma série de painéis usando um programa de computador iterativo de elementos finitos [10] que considera que os tijolos permanecem em regime elástico e que as juntas apresentam uma resposta não linear. Para o caso de tracção uniaxial, a cedência da junta ocorre quando as duas rectas (τ_1 e τ_2) apresentadas na Figura 5.33 se intersectam, isto é, quando,

$$\sigma_t = \frac{F_s}{\left(\frac{F_s}{F_t} + \cot \theta\right) \cdot \sin^2 \theta} \quad (5.29)$$

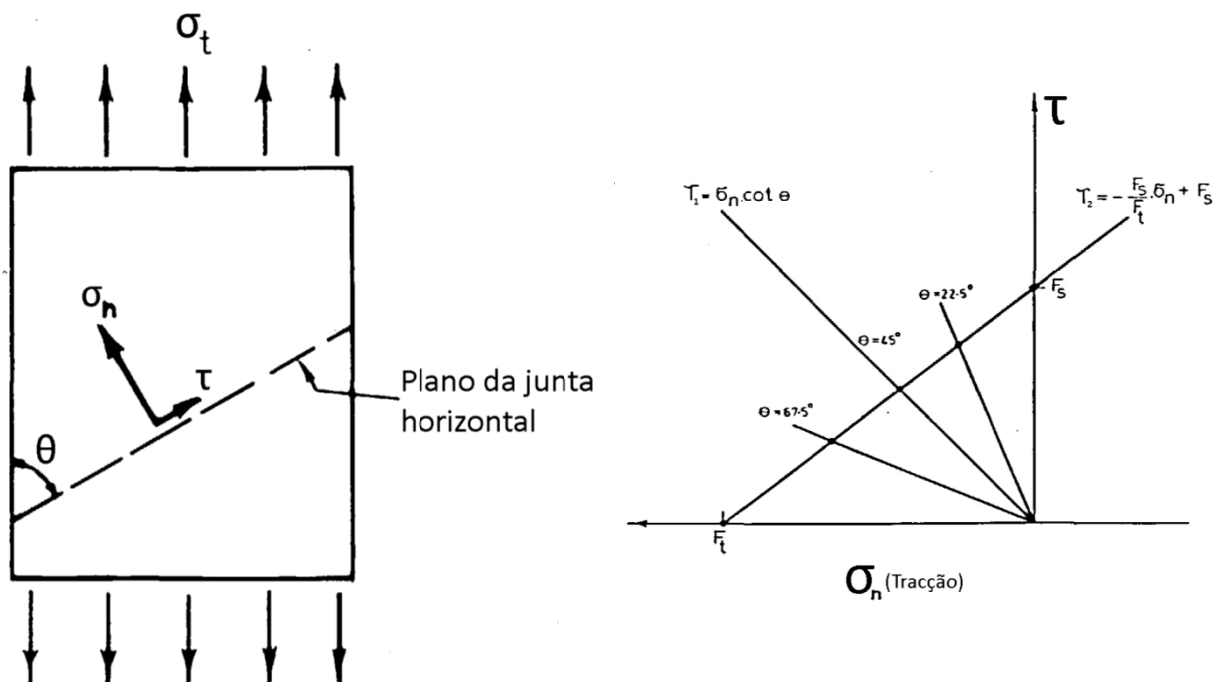


FIGURA 5.33 – Critério de cedência da junta para o caso de tracção uniaxial (adaptado de [10])

sendo σ_t a tensão de tracção aplicada à alvenaria e onde σ_n e τ representam a tensão normal e de corte na junta, respectivamente. Desde a Figura 5.38 à Figura 5.42, expõem-se os envelopes de rotura para cada ângulo (entre a junta horizontal e a tensão vertical) considerado.

Para o ensaio de compressão biaxial, analisaram-se experimentalmente 102 painéis no Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Newcastle. Os mecanismos de rotura experimentais típicos obtidos nestes ensaios, que dependem do rácio das tensões principais, são apresentados na Figura 5.34:

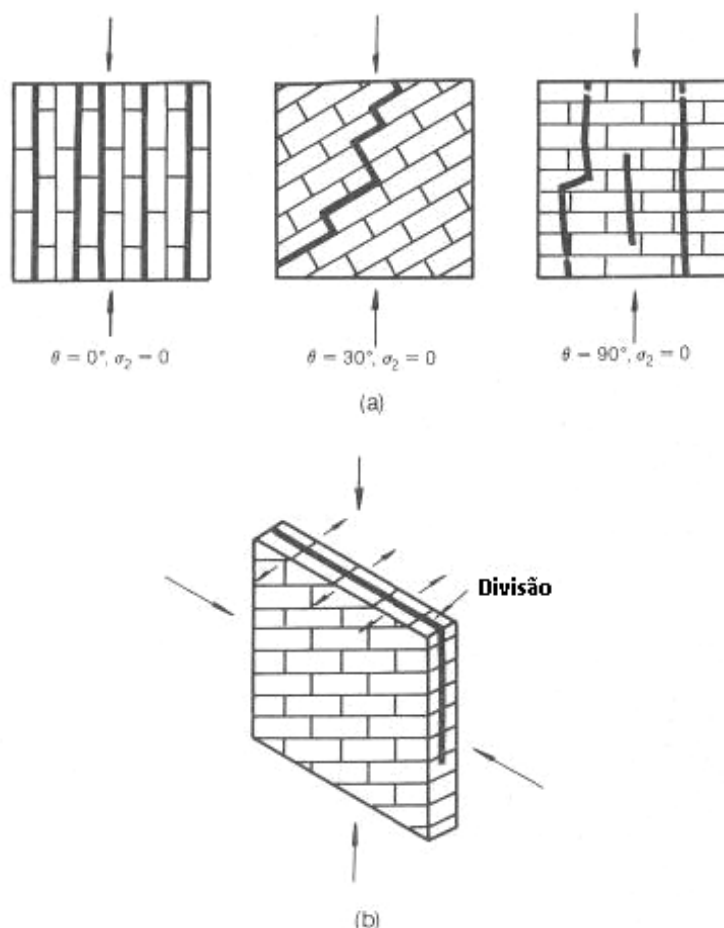


FIGURA 5.34 – Mecanismos de rotura experimentais típicos para os ensaios de compressão biaxial: Compressão (a) uniaxial; (b) biaxial (adaptado de [36])

Desde a Figura 5.43 à Figura 5.47 apresentam-se os resultados experimentais bem como os envelopes de rotura (obtidos através da impressão de curvas médias) para cada ângulo entre a junta horizontal e a tensão vertical. Nestas figuras, os resultados para os rácios (σ_1/σ_2) de 0 (compressão uniaxial segundo σ_2), 0.1, 0.25 e 0.5 foram obtidos dos resultados experimentais usando a simetria dos painéis e do carregamento.

Por fim, para o ensaio de tracção-compressão biaxial, analisaram-se experimentalmente 106 painéis no Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Newcastle. Os mecanismos de rotura experimentais típicos obtidos nestes ensaios, para os vários ângulos da junta horizontal com a tensão vertical e para os diferentes rácios das tensões principais, ocorrem num plano (planos) normal ao plano do painel e são sumarizados na Figura 5.35.

| θ | Tracção Uniaxial | Outros Rácios (σ_1/σ_2) | Compressão Uniaxial |
|--------------|------------------|---------------------------------------|---------------------|
| 0° | | | |
| 22.5° | | | |
| 45° | | | |
| 67.5° | | | |
| 90° | | | |

FIGURA 5.35 – Resumo dos modos de rotura para a tracção-compressão biaxial (adaptado de [37])

A. W. Page ensaiou o painel $\theta=22.5^\circ$ referente à tracção uniaxial, com uma esbelteza maior do que os restantes painéis. Esta alteração geométrica serve para assegurar que um maior número de juntas horizontais intersectem as extremidades livres do painel (Figura 5.35).

Desde a Figura 5.48 à Figura 5.52, apresentam-se os resultados experimentais bem como os envelopes de rotura (obtidos através da impressão de curvas médias) para cada ângulo entre a junta horizontal e a tensão vertical.

5.2.2.3 Simplificações/Considerações

O objectivo deste exemplo era permitir a comparação entre a proposta, referente ao ensaio de tracção biaxial, e os resultados experimentais, referentes aos ensaios de compressão e de tracção-compressão biaxial, obtidos por A. W. Page [10, 36, 37] com os resultados obtidos pelo SUBLIM3d. Para se alcançar este objectivo foi necessário executar um conjunto de hipóteses:

- **Em relação às propriedades da alvenaria:**
 - Inseriu-se as dimensões dos tijolos em metros;
 - Considerou-se que para simular este painéis, toda a base da alvenaria se encontrava simplesmente apoiada (ver Figura 4.2);
 - Para a determinação das dimensões dos tijolos no caso do ensaio de tracção biaxial considerou-se que:
 - I. A espessura dos painéis e o rácio entre a largura e a espessura dos tijolos são os mesmos que os apresentados pelo ensaios de compressão e tracção-compressão biaxial;
 - II. A junta apresenta uma espessura de 0.015 m (espessura existente nos ensaios de compressão e tracção-compressão biaxial);

Através de cálculos simples, usando as propriedades da alvenaria, obtém-se as dimensões pretendidas: 0.11 x 0.035 m.

No caso do ensaio de compressão e tracção-compressão biaxial:

- I. As dimensões dos tijolos foram obtidas através de cálculos simples, usando as propriedades da alvenaria, resultando dimensionalmente em 0.11 x 0.031875 m;
 - II. Considerou-se que o painel no ensaio de tracção uniaxial para o caso de $\theta=22.5^\circ$ também apresenta a mesma secção que os restantes painéis.
- **Em relação às propriedades dos materiais:**
 - Para definir os parâmetros do critério da junta seguiram-se as seguintes etapas:
 - I. Considerou-se que o F_t do ensaio de tracção biaxial corresponde à resistência média à tracção da junta;
 - II. Considerou-se que a resistência média à compressão assume o valor de 8.01 MPa (valor apresentado em [38]);
 - III. Para a obtenção dos restantes parâmetros seguiu-se o mesmo raciocínio presente no capítulo 5.2.1.2.3 em relação às propriedades dos blocos de pedra (considerando para esta determinação que a resistência média à compressão assume o valor apresentado no ensaio de tracção-compressão biaxial), obtendo-se neste caso $c=0.607$ MPa e $\varphi = 63.125^\circ$. Observou-se que o ângulo de atrito obtido é muito elevado, por isso optou-se por um valor médio (que corresponde a sensivelmente metade do obtido), isto é, considerou-se $\varphi = 30^\circ$.
 - Para definir os parâmetros do critério do tijolo seguiram-se as seguintes etapas:
 - I. Considerou-se que a resistência média à compressão dos tijolos é de 15.41 MPa (valor fornecido para os ensaios de compressão e de tracção-compressão biaxial);
 - II. Considerou-se que a resistência média à tracção dos tijolos é de 1 MPa;
 - III. Considerou-se que ângulo de atrito exibe o mesmo valor que o apresentado pela junta inicialmente, isto é, $\varphi = 63.125^\circ$.

IV. Pela relação dos triângulos presentes na Figura 5.22, determina-se a coesão,

$$c = \tan \varphi \times \frac{R_c}{2} \left(\frac{1}{\sin \varphi} - 1 \right) \quad (5.30)$$

obtendo-se, $c = 1.841 \text{ MPa}$.

Para o ensaio de tracção-compressão biaxial considerou-se que os parâmetros de resistência média à tracção do tijolo e da junta, em vez dos valores apresentados anteriormente, apresentam o valor de 2.95MPa e 0.2MPa, respectivamente.

• **Em relação ao tipo de carregamento:**

o De seguida apresentam-se as hipóteses específicas do ensaio de compressão biaxial: Reformularam-se as cargas aplicadas na estrutura da alvenaria de forma a aproveitar o malhador descrito no capítulo 5.1.2, através do seguinte raciocínio:

- I. Representa-se no círculo de Mohr, o estado de tensão aplicado na alvenaria, considerando que o rácio de $|F_2(\sigma_1)|/|F_1(\sigma_2)|$ é sempre maior ou igual a 1 (porque para os restantes rácios os resultados foram obtidos usando a simetria dos painéis e do carregamento), ver Figura 5.36:

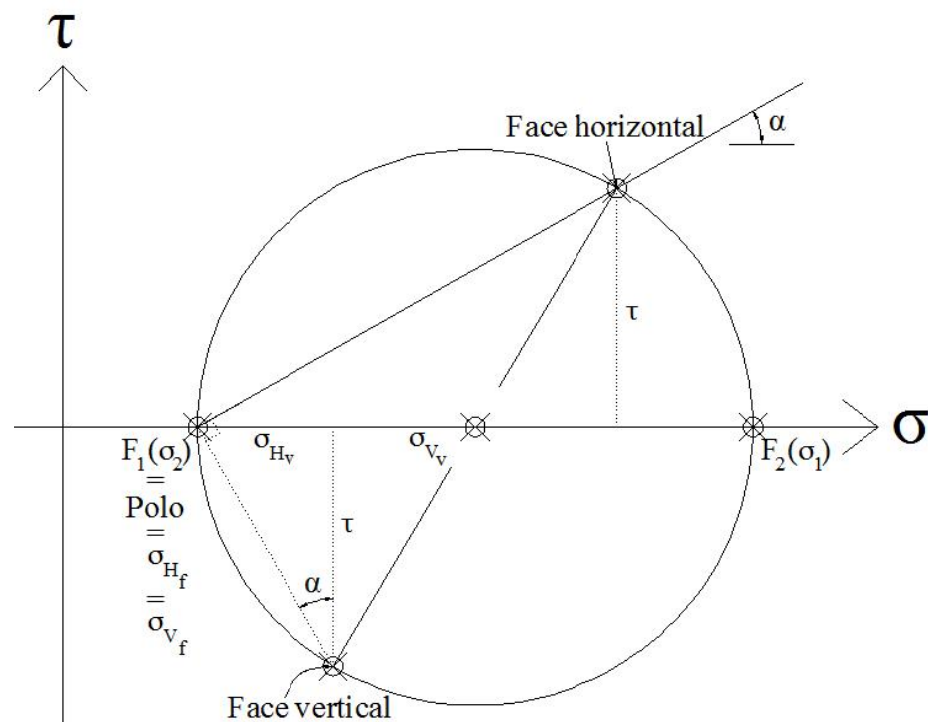


FIGURA 5.36 – Estado de tensão aplicado à alvenaria (círculo de Mohr)

- II. Representou-se na Figura 5.36 o estado de tensão equivalente aplicado à alvenaria quando $\theta=90^\circ$, isto é, como

$$\alpha = 90^\circ - \theta \quad (5.31)$$

equivale a dizer quando $\alpha=0^\circ$;

- III. Pela visualização da Figura 5.36, imagina-se o processo de carregamento até ocorrer o colapso do painel;

- IV. Supõe-se inicialmente que o carregamento $F_1(\sigma_2)$ se mantém constante e que a rotura ocorre por aumento do carregamento $F_2(\sigma_1)$. Esta hipótese provoca que o carregamento aplicado à alvenaria para $\alpha=0^\circ$ se divida em duas componentes (componente fixa e variável), ver Figura 5.36 e Figura 5.37:

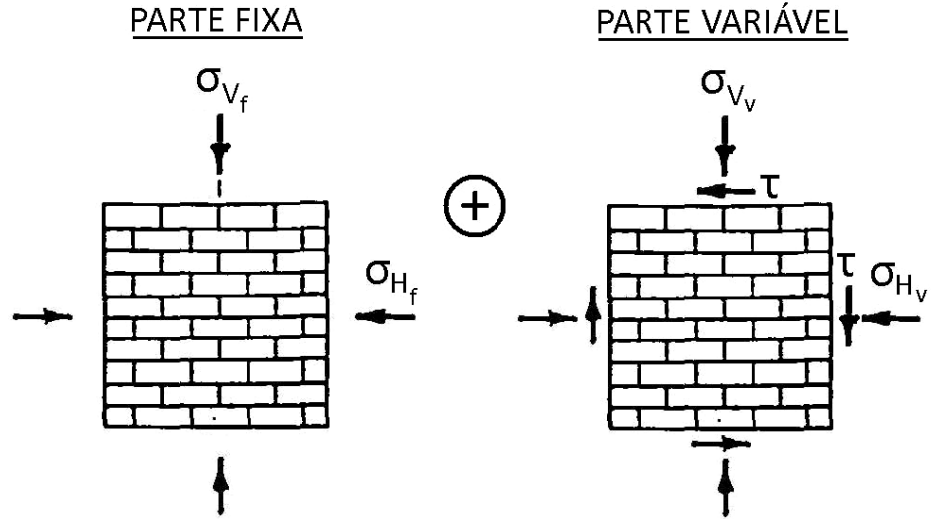


FIGURA 5.37 – Carregamento equivalente aplicado na estrutura da alvenaria com $\theta=90^\circ$

- V. Supondo que,

$$\sigma_{V_v} = 1 \text{ MPa} \quad (5.32)$$

obtêm-se as restantes componentes (através da Figura 5.36),

$$\sigma_{H_f} = \sigma_{V_f} = F_1(\sigma_2) \quad (5.33)$$

$$\tau = \tan \alpha \quad (5.34)$$

$$\sigma_{H_v} = \tan^2 \alpha \quad (5.35)$$

- VI. Para representar correctamente o processo de carregamento, teve-se que anular a suposição executada no ponto IV (componente fixa). Para isso substituiu-se a tensão vertical (ver Figura 5.36),

$$F_2(\sigma_1) = F_1(\sigma_2) + \lambda(1 + \tan^2 \alpha) \quad (5.36)$$

na expressão do rácio,

$$\text{Rácio} = \frac{F_2(\sigma_1)}{F_1(\sigma_2)} \quad (5.37)$$

obtendo-se (resolvendo em ordem a $F_1(\sigma_2)$),

$$F_1(\sigma_2) = \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\text{Rácio} - 1} \lambda \quad (5.38)$$

- VII. Por fim, substituindo a equação (5.38) na equação (5.33), obtêm-se as várias componentes variáveis que se aplicam ao painel com $\alpha=0^\circ$ (ver soma presente na Figura 5.37):

$$\sigma_V = \sigma_{V_f} + \sigma_{V_V} = \left(\frac{1+\tan^2 \alpha}{R\acute{a}cio-1} + 1 \right) \lambda \quad (5.39)$$

$$\sigma_H = \sigma_{H_f} + \sigma_{H_V} = \left(\frac{1+\tan^2 \alpha}{R\acute{a}cio-1} + \tan^2 \alpha \right) \lambda \quad (5.40)$$

$$\tau = \tan \alpha \lambda \quad (5.41)$$

- o De seguida apresentam-se as hipóteses específicas do ensaio de tracção biaxial: Reformularam-se as cargas aplicadas na estrutura da alvenaria, através do mesmo raciocínio apresentado para o ensaio de compressão biaxial, obtendo-se para este caso as várias componentes variáveis que se aplicam ao painel com $\alpha=0^\circ$ através das seguintes equações:

$$\sigma_V = - \left(\frac{1+\tan^2 \alpha}{R\acute{a}cio-1} + 1 \right) \lambda \quad (5.42)$$

$$\sigma_H = - \left(\frac{1+\tan^2 \alpha}{R\acute{a}cio-1} + \tan^2 \alpha \right) \lambda \quad (5.43)$$

Equação (5.41)

sendo o Rácio neste caso dado também pela fórmula,

$$R\acute{a}cio = \tan \psi \quad (5.44)$$

onde o ângulo ψ apresenta os valores de 90° , 81° , 72° , 63° , 54° e 45° .

- o De seguida apresentam-se as hipóteses específicas do ensaio de tracção-compressão biaxial: Reformularam-se as cargas aplicadas na estrutura da alvenaria, através do mesmo raciocínio apresentado para o ensaio de compressão biaxial. Note-se que neste ensaio não se considera a hipótese apresentada no ponto I, porque as tensões mantêm sempre a mesma relação de grandeza ($\sigma_2 \geq \sigma_1$). Obtiveram-se para este caso as várias componentes variáveis que se aplicam ao painel com $\alpha=0^\circ$ através das seguintes equações:

$$\sigma_V = \left(\frac{R\acute{a}cio(1+\tan^2 \alpha)}{R\acute{a}cio+1} - 1 \right) \lambda \quad (5.45)$$

$$\sigma_H = \left(\frac{R\acute{a}cio(1+\tan^2 \alpha)}{R\acute{a}cio+1} - \tan^2 \alpha \right) \lambda \quad (5.46)$$

$$\tau = -\tan \alpha \lambda \quad (5.47)$$

sendo o Rácio neste caso dado apenas pela fórmula,

$$R\acute{a}cio = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1|} \quad (5.48)$$

- **Em relação aos parâmetros opcionais:**

- o Considerou-se que a solução obtida pelo SUBLIM3d é alcançada pela precisão (1×10^{-6});
- o Não se executou qualquer alteração ao parâmetro de penalidade inicial, porque o valor standard permitem que a solução seja boa e que convirja rapidamente.

5.2.2.4 Resultados SUBLIM3d

Os resultados obtidos pelo SUBLIM3d (tendo em consideração o capítulo 5.2.2.3) para o ensaio de tracção biaxial são apresentados desde a Figura 5.38 à Figura 5.42.

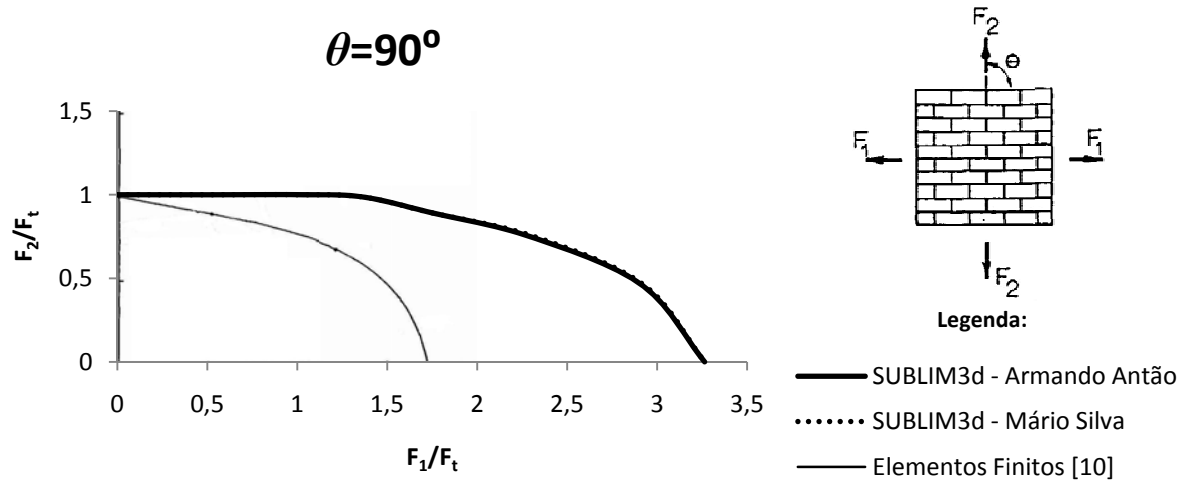


FIGURA 5.38 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas (SUBLIM3d e [10]) para o painel com $\theta=90^\circ$ no ensaio de tracção biaxial

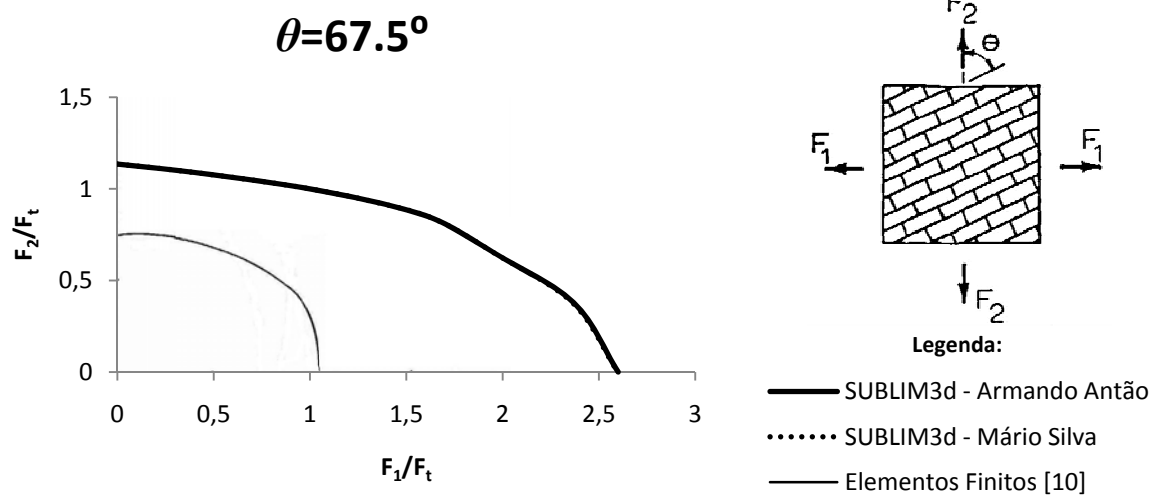


FIGURA 5.39 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas (SUBLIM3d e [10]) para o painel com $\theta=67.5^\circ$ no ensaio de tracção biaxial

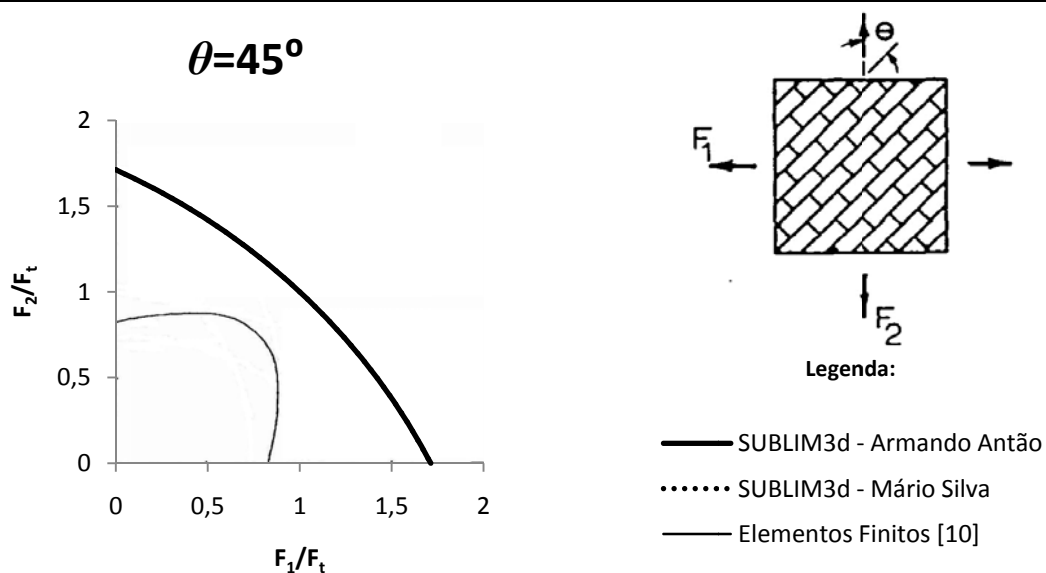


FIGURA 5.40 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas (SUBLIM3d e [10]) para o painel com $\theta=45^\circ$ no ensaio de tracção biaxial

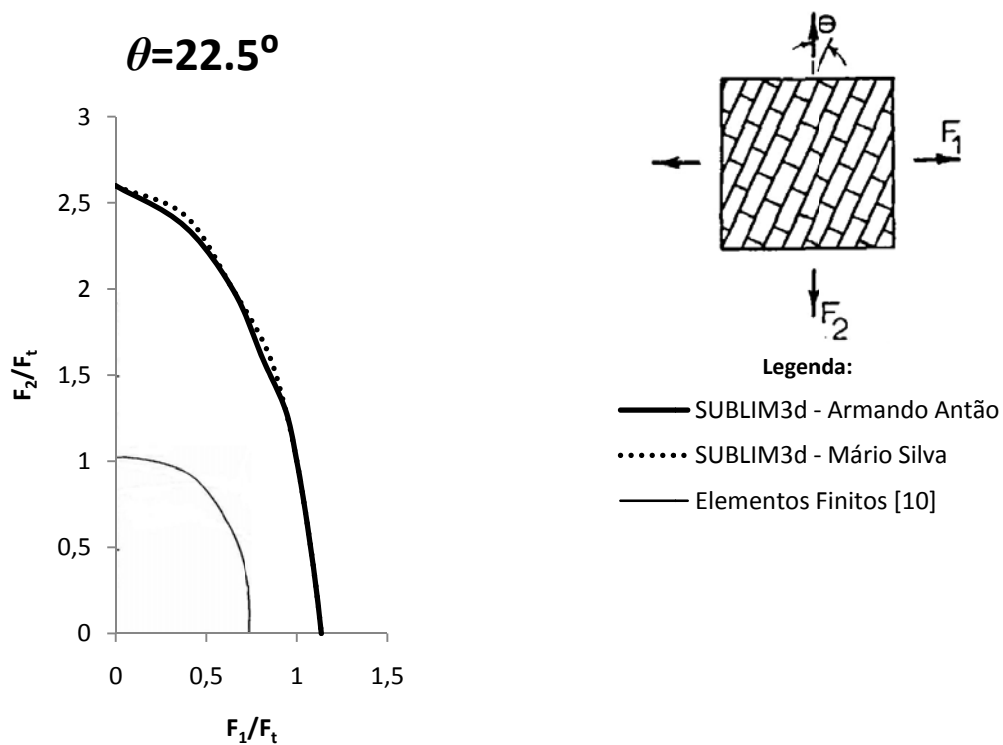


FIGURA 5.41 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas (SUBLIM3d e [10]) para o painel com $\theta=22.5^\circ$ no ensaio de tracção biaxial

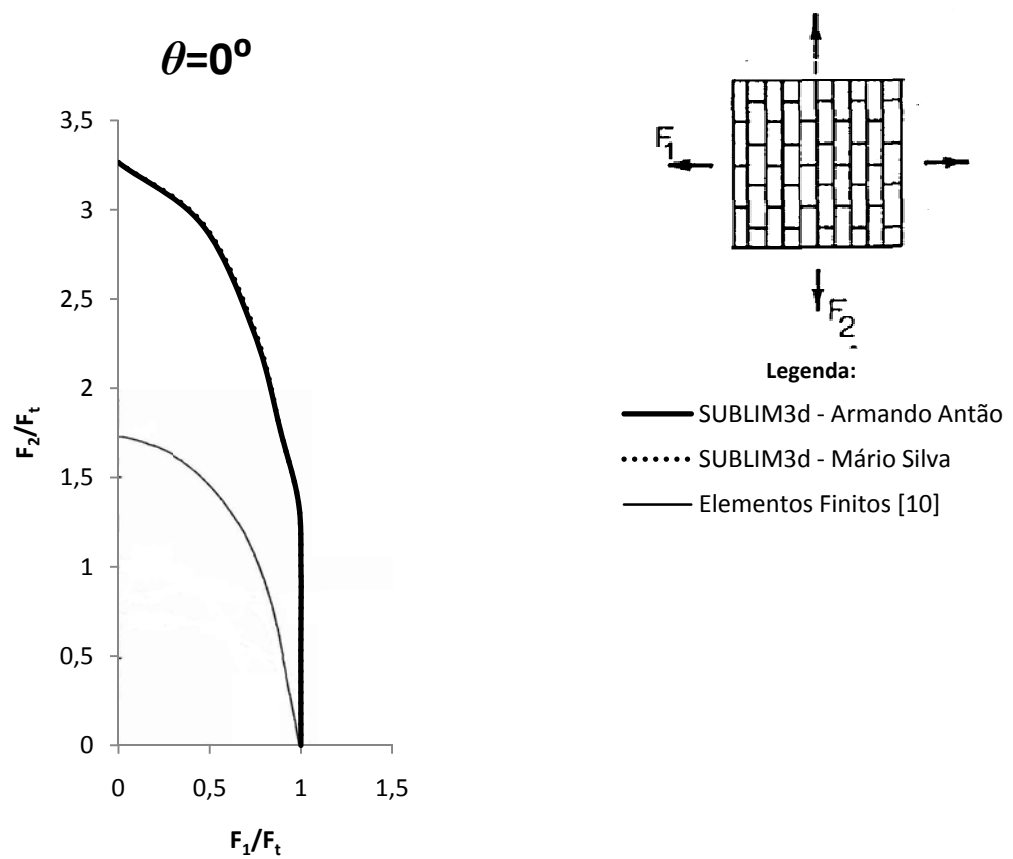


FIGURA 5.42 – Comparação dos resultados obtidos pelas estimativas teóricas (SUBLIM3d e [10]) para o painel com $\theta=0^\circ$ no ensaio de tracção biaxial

Para o ensaio de compressão biaxial os resultados obtidos pelo SUBLIM3d são apresentados desde a Figura 5.43 à Figura 5.47.

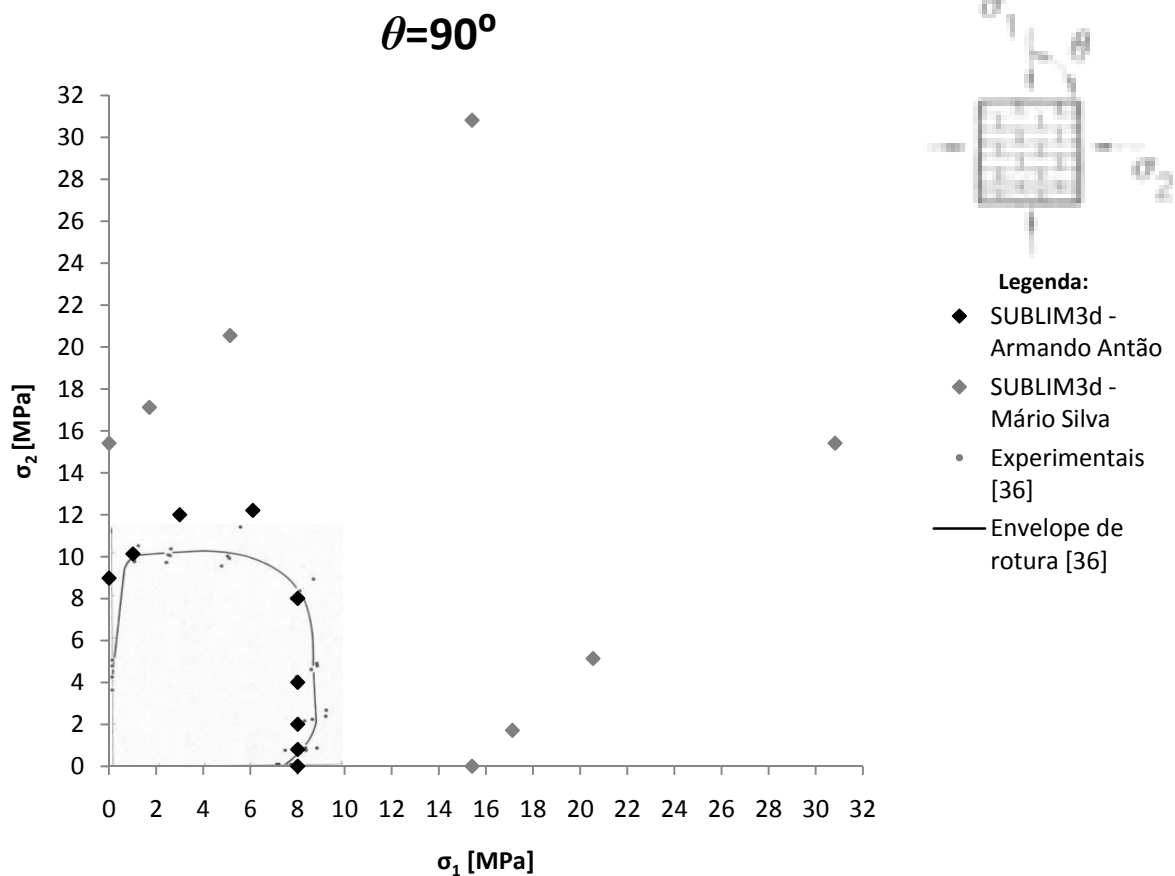


FIGURA 5.43 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [36] para o painel com $\theta=90^\circ$ no ensaio de compressão biaxial

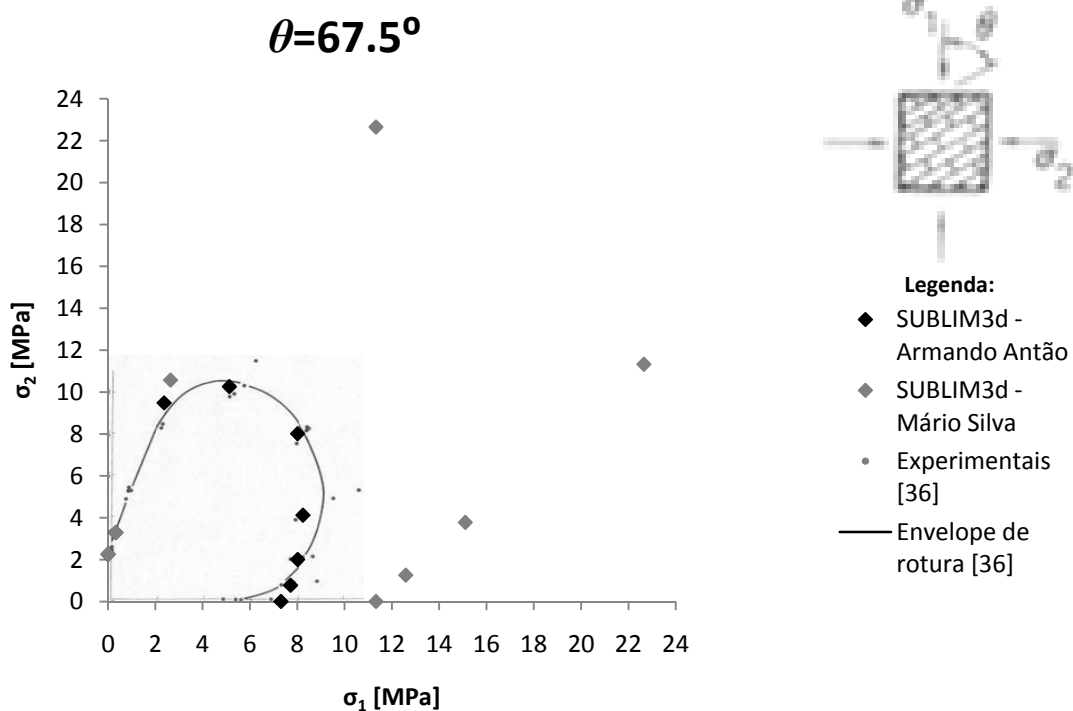


FIGURA 5.44 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [36] para o painel com $\theta=67.5^\circ$ no ensaio de compressão biaxial

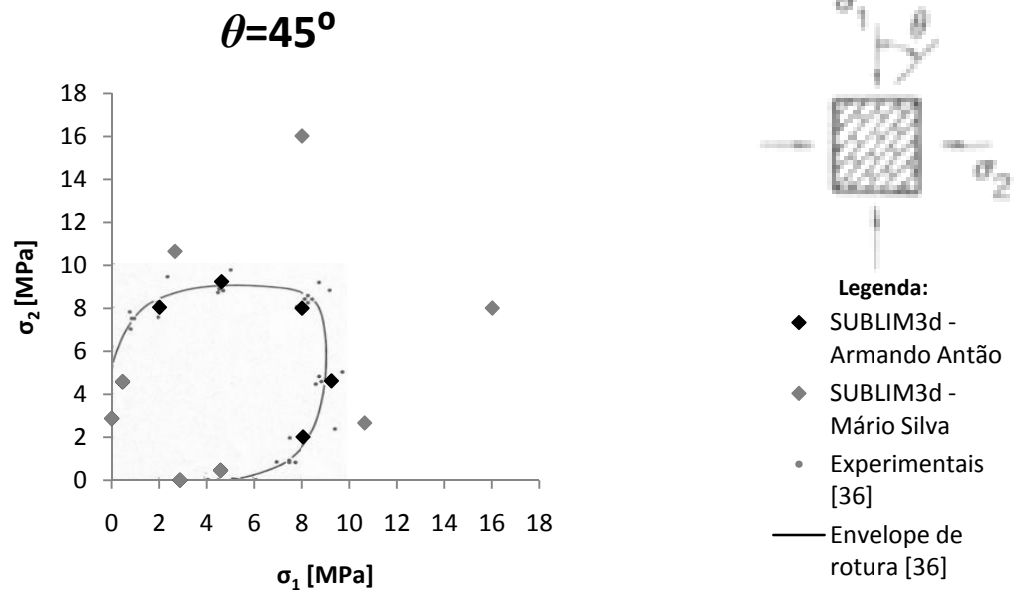


FIGURA 5.45 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [36] para o painel com $\theta=45^\circ$ no ensaio de compressão biaxial

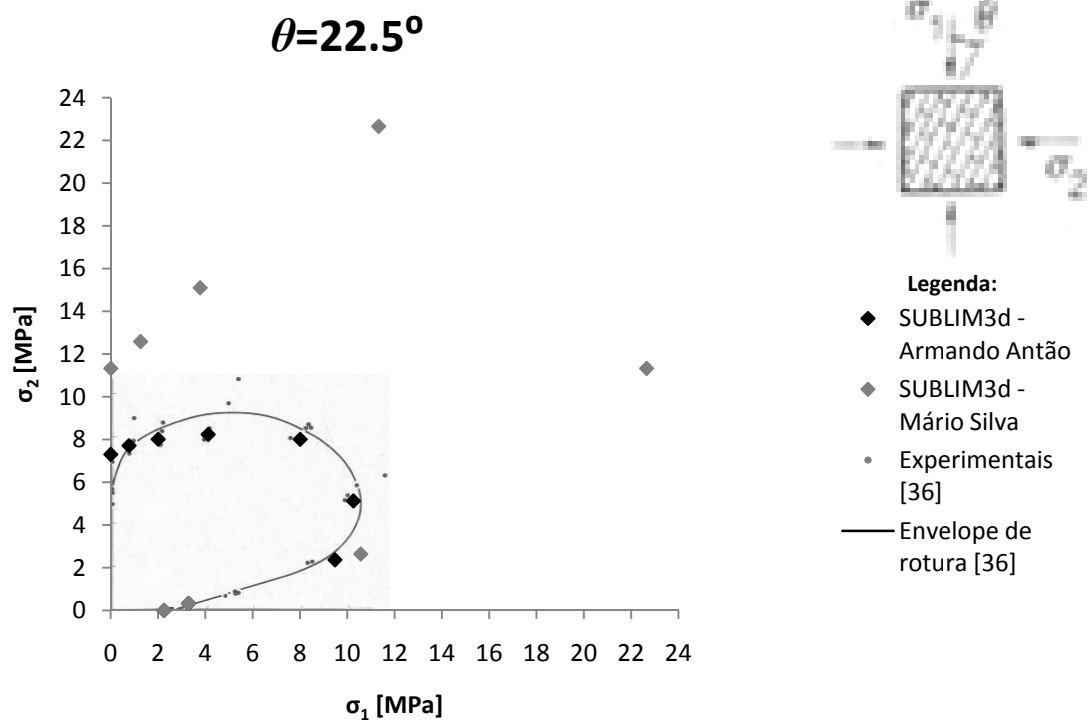


FIGURA 5.46 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [36] para o painel com $\theta=22.5^\circ$ no ensaio de compressão biaxial

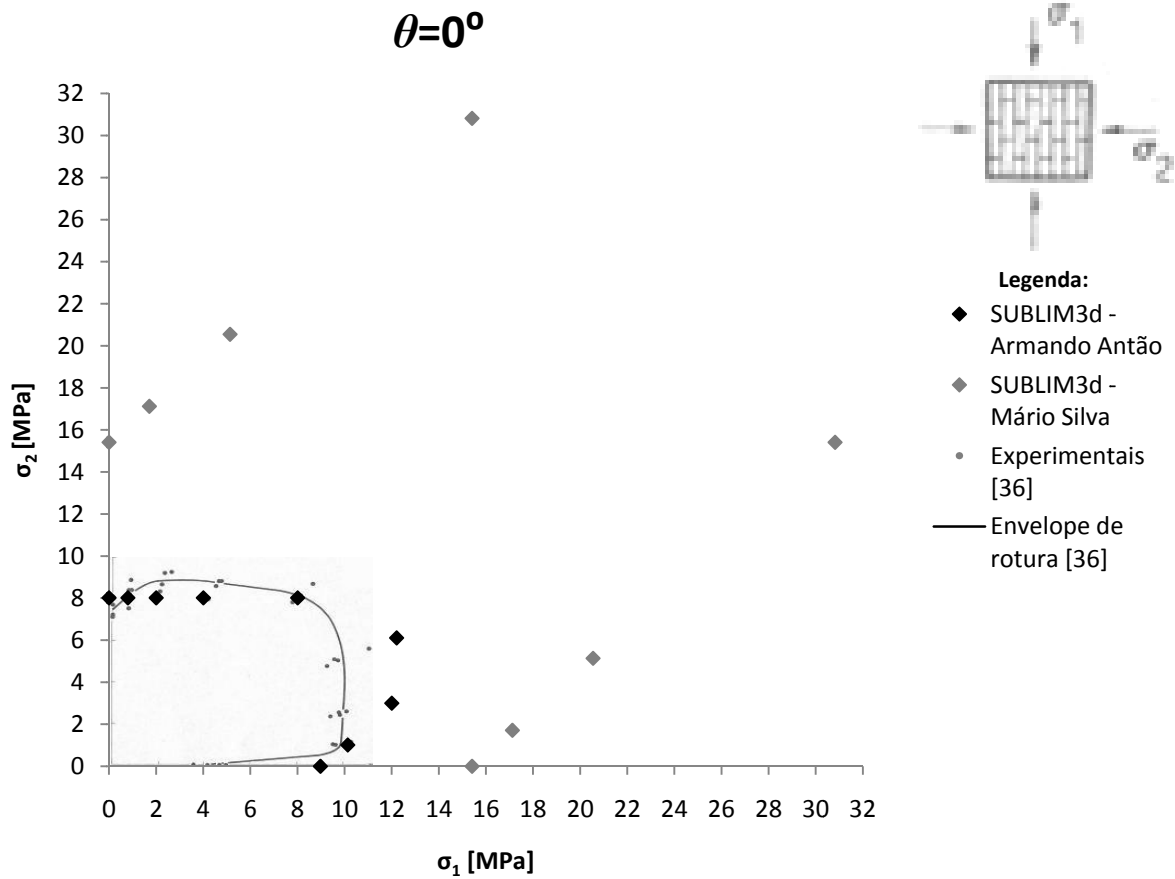


FIGURA 5.47 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [36] para o painel com $\theta=0^\circ$ no ensaio de compressão biaxial

Para o ensaio de tracção – compressão biaxial os resultados obtidos pelo SUBLIM3d são apresentados desde a Figura 5.48 à Figura 5.52.

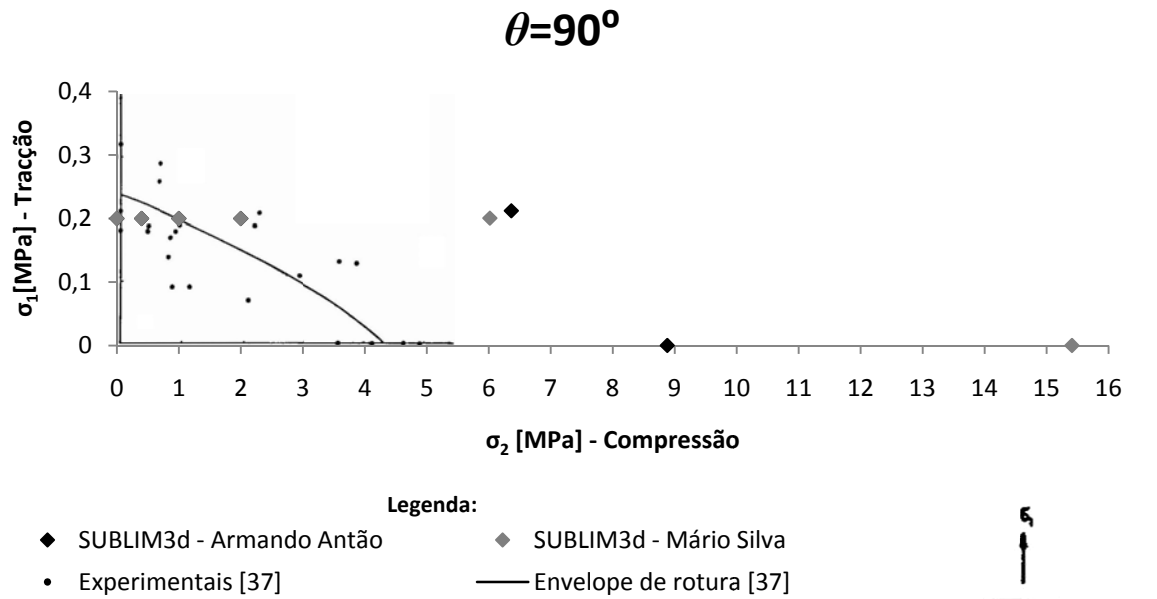


FIGURA 5.48 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [37] para o painel com $\theta=90^\circ$ no ensaio de tracção – compressão biaxial

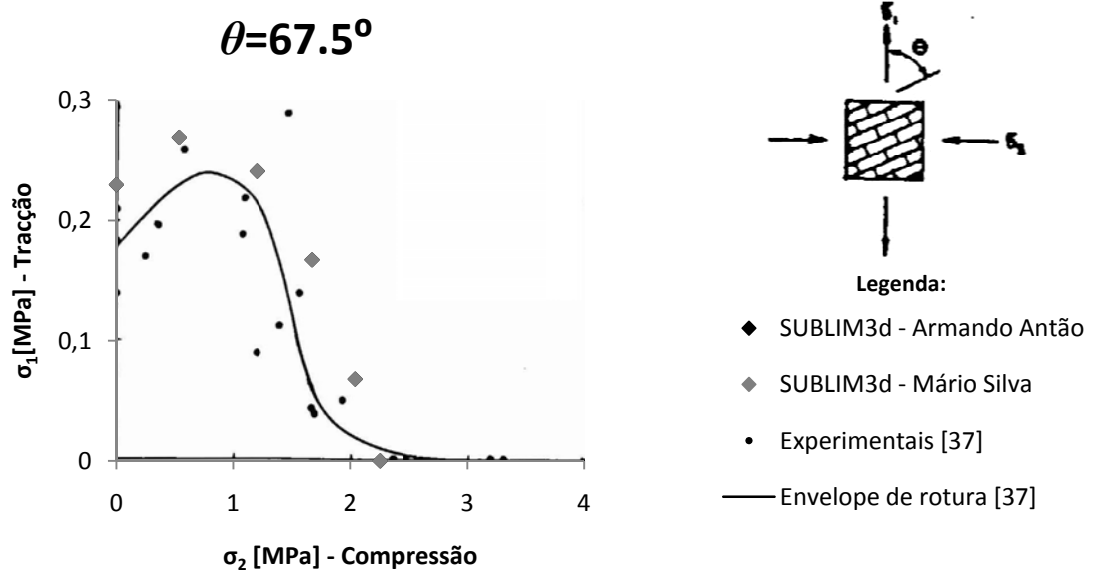


FIGURA 5.49 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [37] para o painel com $\theta=67.5^\circ$ no ensaio de tracção – compressão biaxial

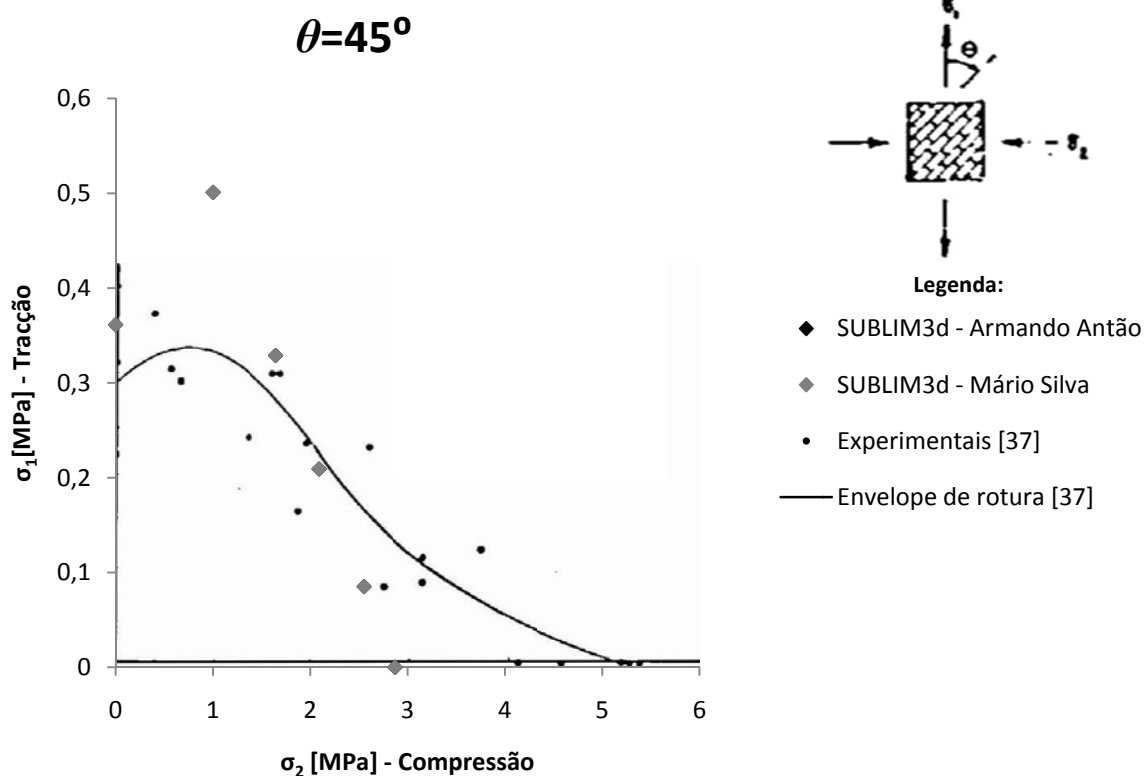


FIGURA 5.50 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [37] para o painel com $\theta=45^\circ$ no ensaio de tracção – compressão biaxial

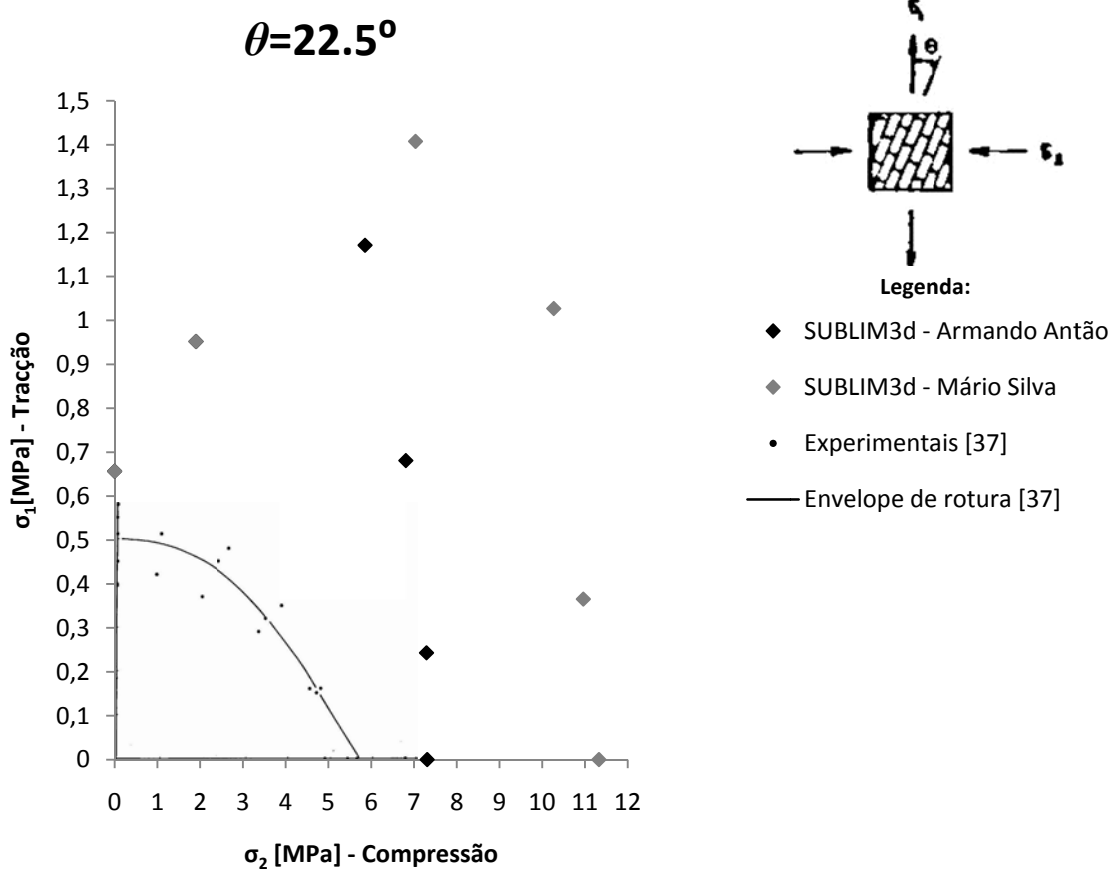


FIGURA 5.51 – Comparação dos resultados obtidos pelos SUBLIM3d com os experimentais [37] para o painel com $\theta=22.5^\circ$ no ensaio de tracção – compressão biaxial

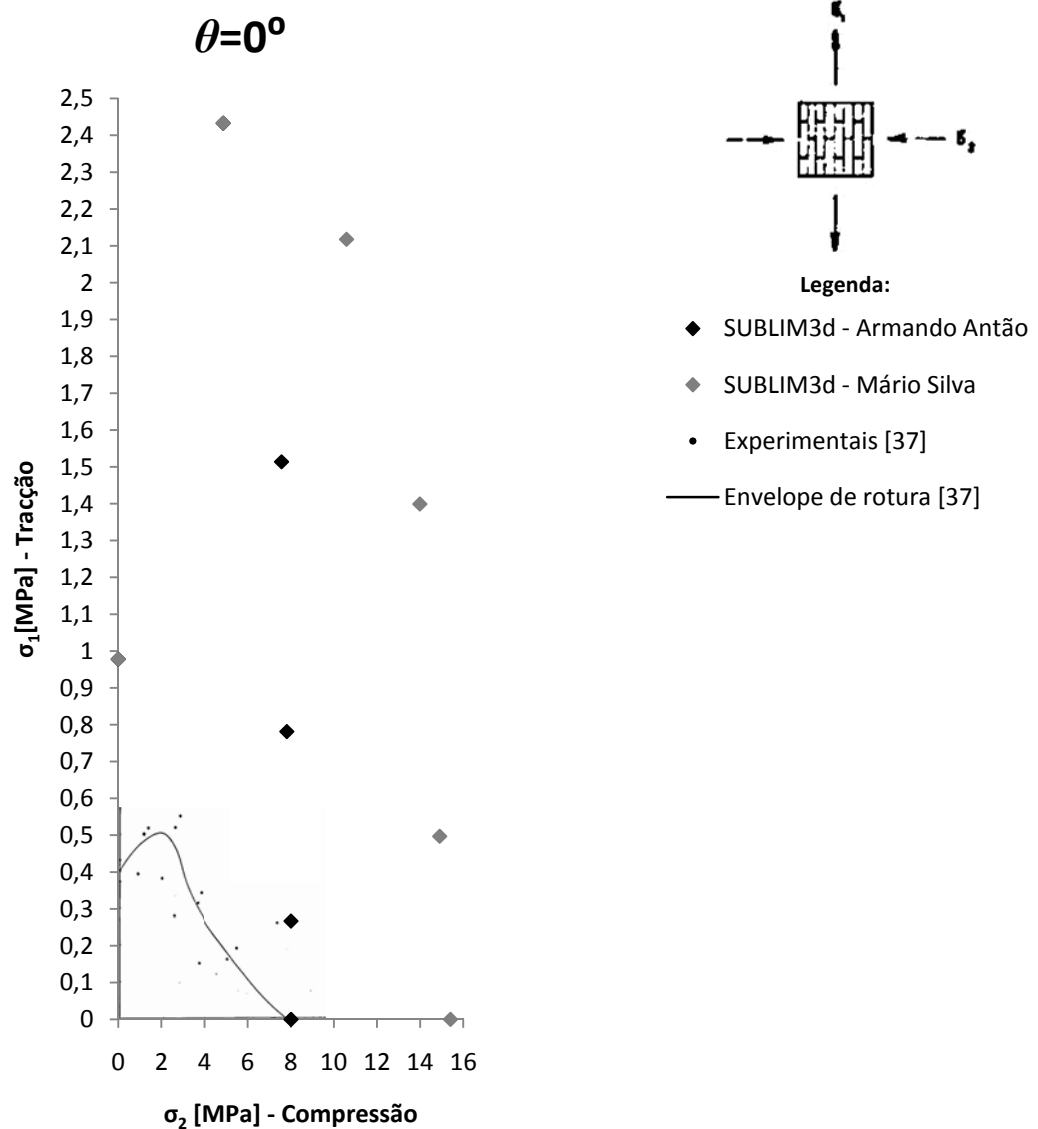


FIGURA 5.52 – Comparação dos resultados obtidos pelo SUBLIM3d com os experimentais [37] para o painel com $\theta=0^\circ$ no ensaio de tracção - compressão biaxial

Os resultados teóricos obtidos pelo SUBLIM3d, apresentados nestas figuras, são obtidos através do raciocínio inverso apresentado no capítulo 5.2.2.3 (em relação ao tipo de carregamento). Além disso, para o ensaio de tracção e de tracção – compressão biaxial os resultados apresentados nestas figuras encontram-se em módulo.

Observa-se a partir do ficheiro de cálculo, que a convergência da solução para cada painel foi rápida, apresentando um tempo de execução dos cálculos em computação sequencial inferior a 1 minuto e 5 segundos, que é notável para um problema não linear com possibilidades múltiplas de rotura.

Apresentam-se na Tabela 5.8, as principais características das malhas utilizadas, designadamente, o tipo e o número de elementos associado à malha, bem como o número de graus de liberdade globais e locais.

TABELA 5.8 – Principais características das malhas utilizados no exemplo 3

| Ensaio | Tipo de elementos | Número de elementos | DOF | |
|------------------------------|-------------------|---------------------|---------|--------|
| | | | Globais | Locais |
| Tracção biaxial | Linear | 534 | 647 | 1068 |
| Compressão biaxial | Linear | 316 | 390 | 632 |
| Tracção – Compressão Biaxial | Linear | 316 | 390 | 632 |

Por último, para cada ensaio apresentam-se algumas informações complementares:

- **Ensaio de tracção biaxial:**

A distribuição típica da dissipação plástica nos elementos do painel e a configuração típica do mecanismo de colapso obtidos pelo SUBLIM3d são apresentados desde a Figura 5.53 à Figura 5.55,

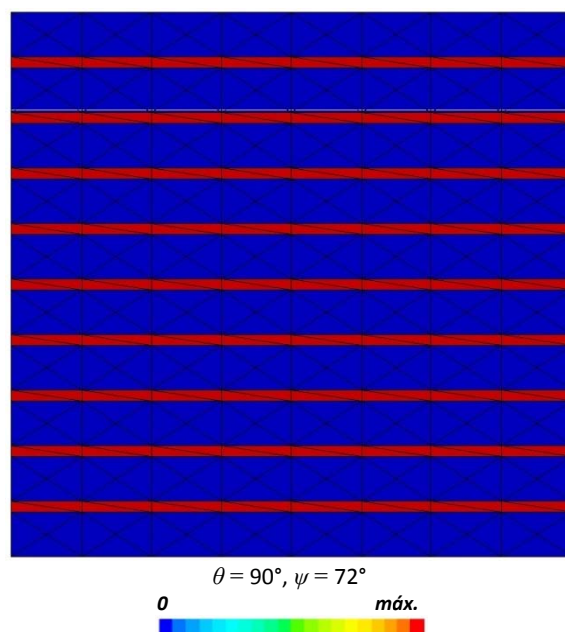


FIGURA 5.53 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3, referente ao ensaio de tracção biaxial – Parte I

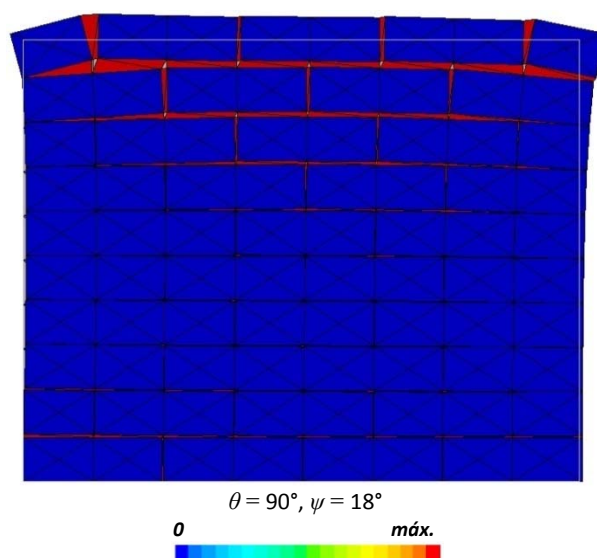


FIGURA 5.54 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3, referente ao ensaio de tracção biaxial – Parte II

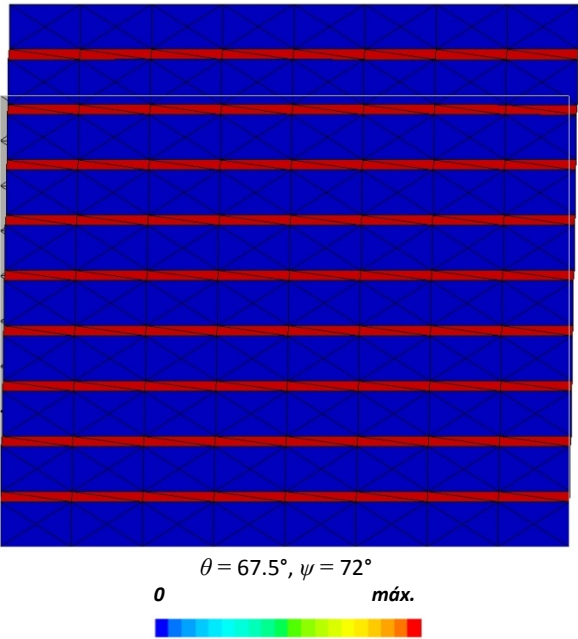


FIGURA 5.55 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3, referente ao ensaio de tracção biaxial – Parte III

• Ensaio de compressão biaxial:

A distribuição típica da dissipação plástica nos elementos do painel e a configuração típica do mecanismo de colapso obtidos pelo SUBLIM3d são apresentados desde a Figura 5.56 à Figura 5.58,

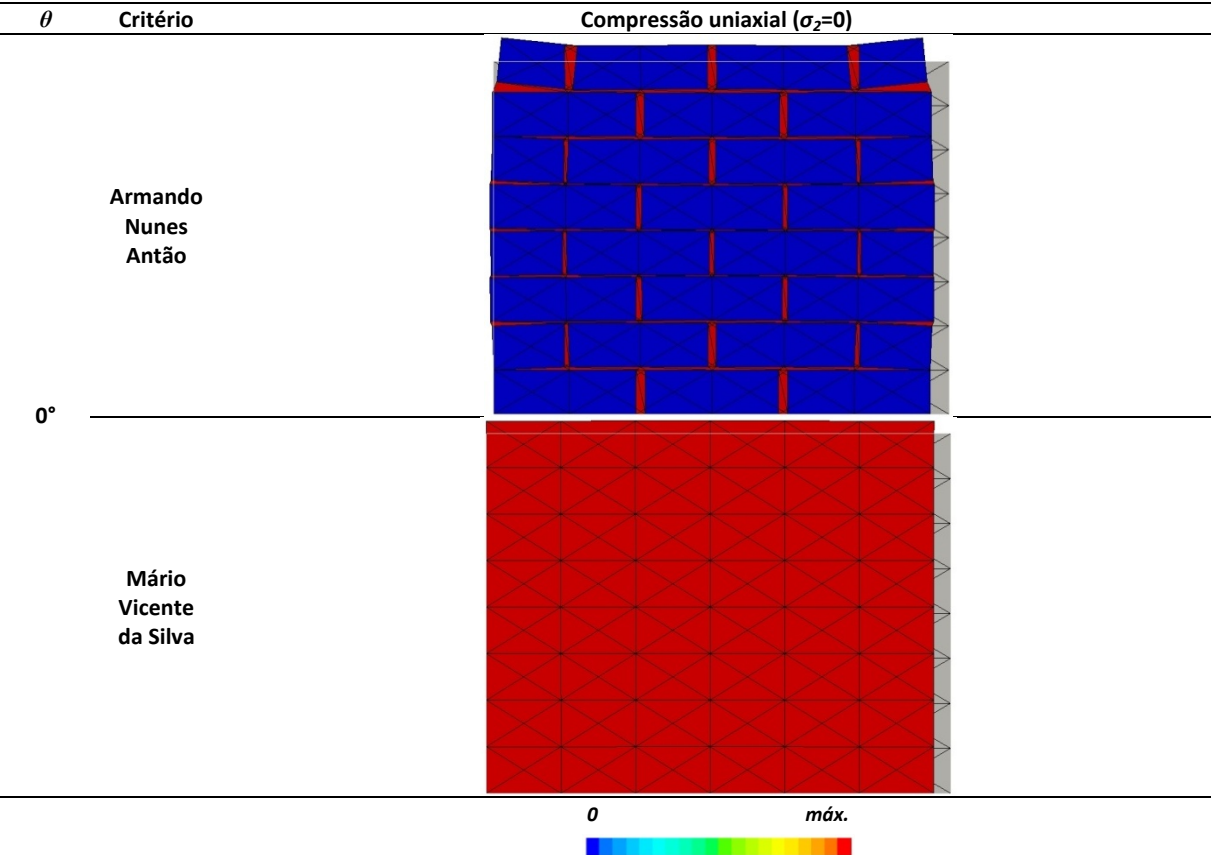


FIGURA 5.56 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=0^\circ$ e $\sigma_2=0$, referente ao ensaio de compressão biaxial

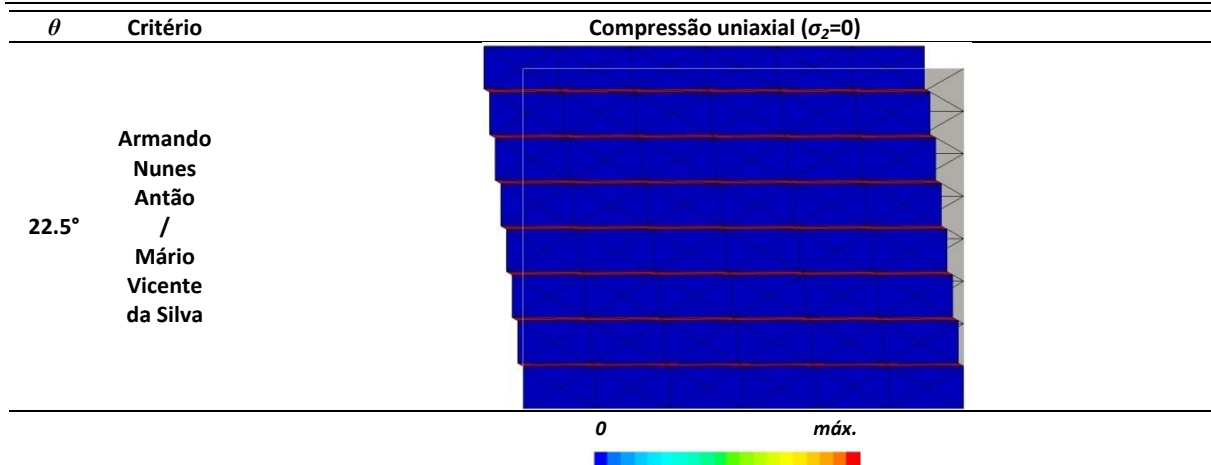


FIGURA 5.57 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=22.5^\circ$ e $\sigma_2=0$, referente ao ensaio de compressão biaxial

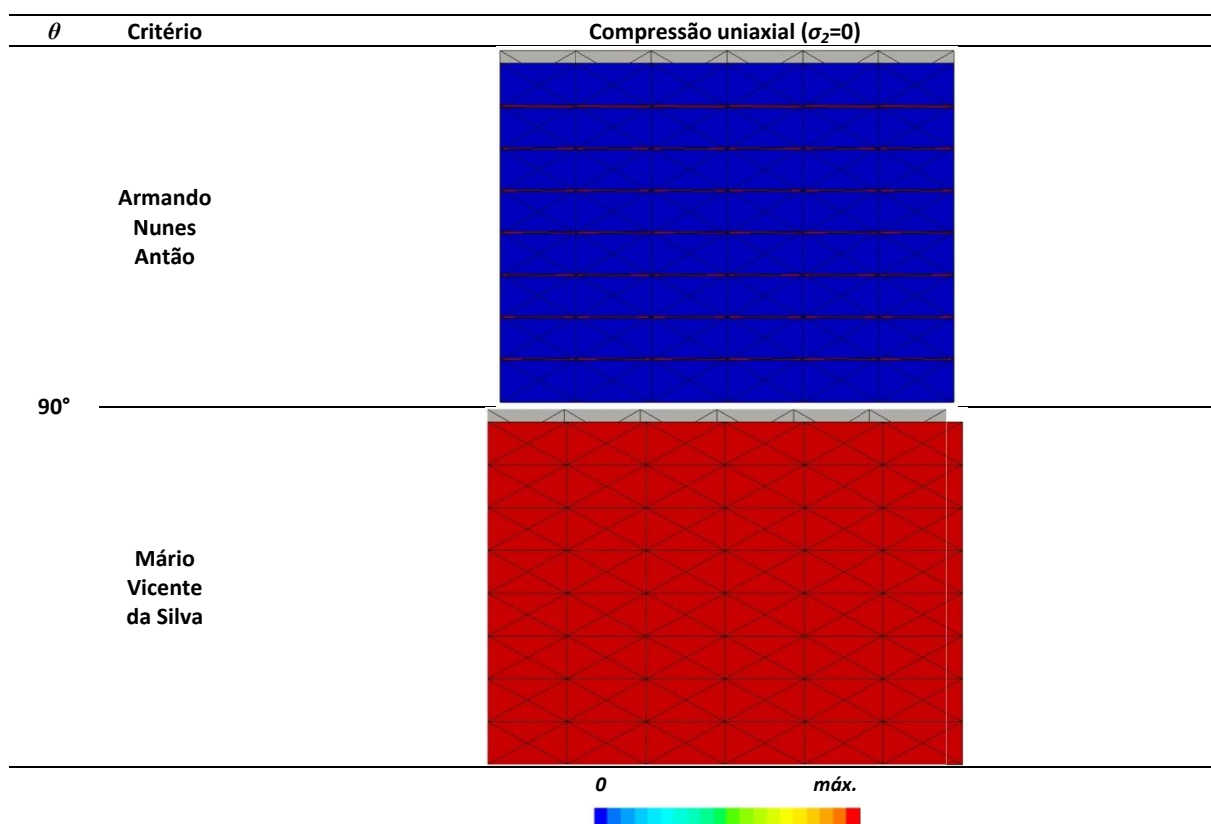


FIGURA 5.58 – Dissipação plástica e malha deformada típicas obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=90^\circ$ e $\sigma_2=0$, referente ao ensaio de compressão biaxial

- Ensaio de tracção - compressão biaxial:

A distribuição da dissipação plástica nos elementos do painel e a configuração do mecanismo de colapso obtidos pelo SUBLIM3d, para os vários ângulos da junta horizontal com a tensão vertical e para os diferentes rácios das tensões principais, são sumarizados desde a Figura 5.59 à Figura 5.63,

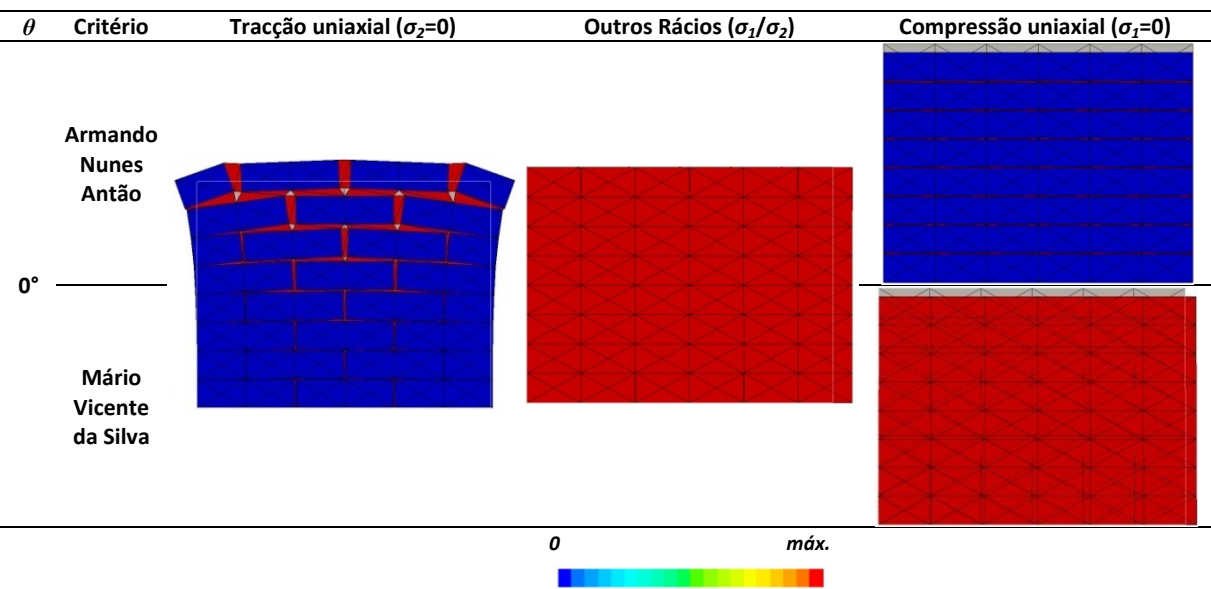


FIGURA 5.59 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=0^\circ$, referente ao ensaio de tracção – compressão biaxial

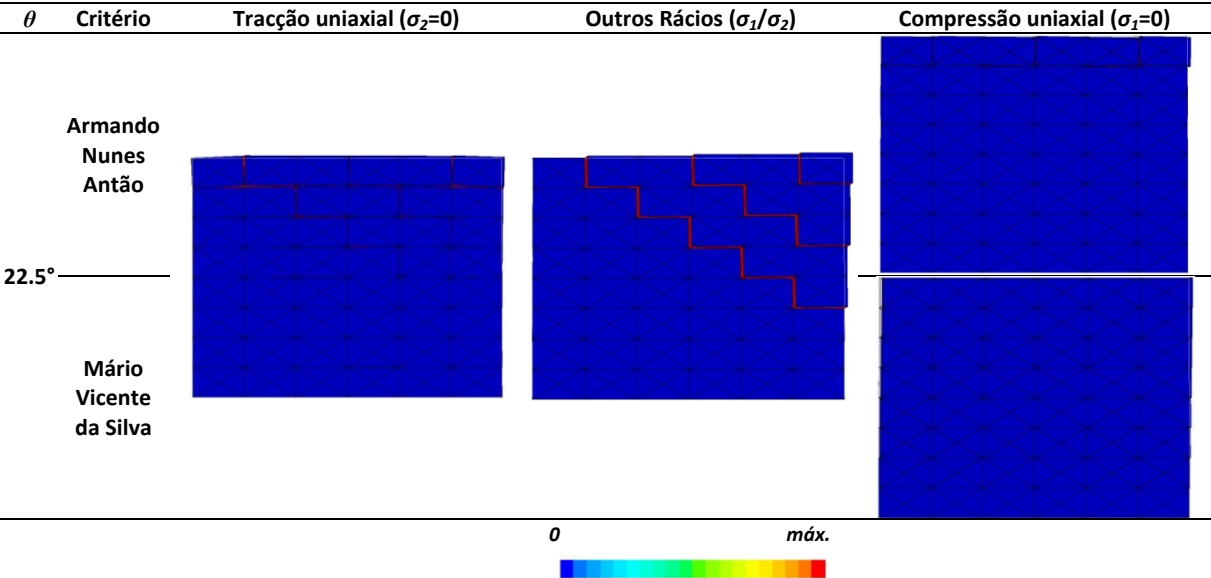


FIGURA 5.60 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=22.5^\circ$, referente ao ensaio de tracção – compressão biaxial

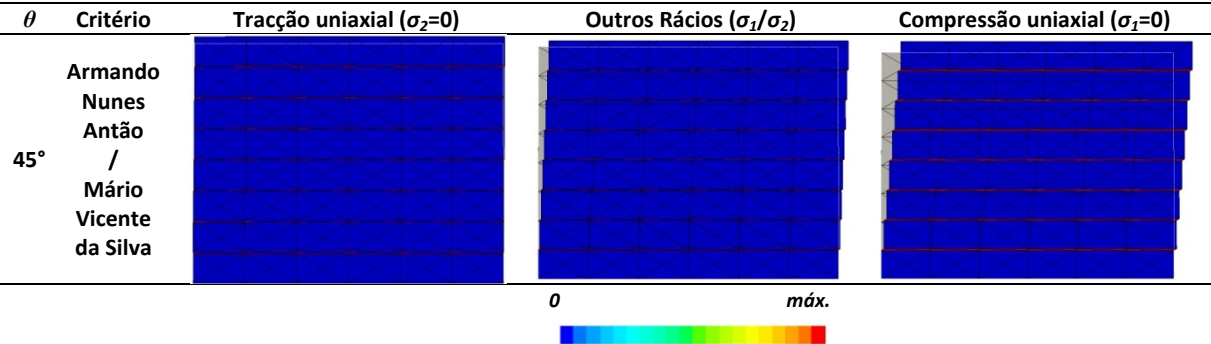


FIGURA 5.61 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=45^\circ$, referente ao ensaio de tracção – compressão biaxial

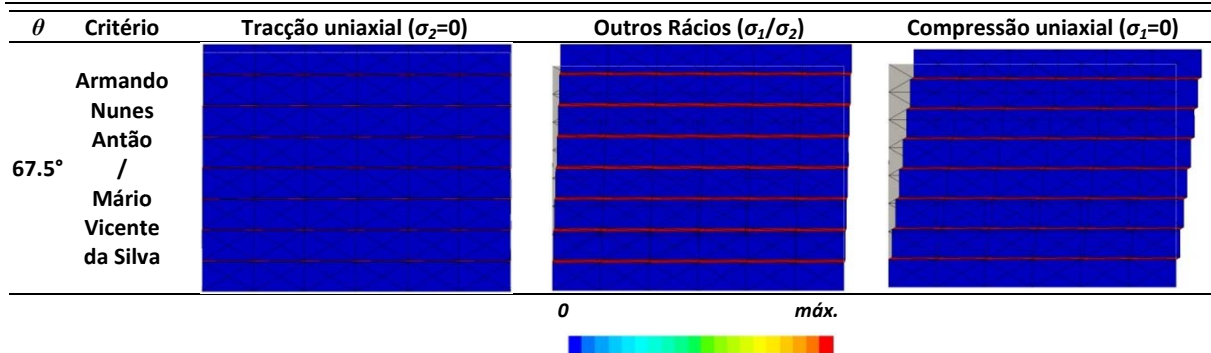


FIGURA 5.62 – Dissipação plástica e malha deformada obtidas pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=67.5^\circ$, referente ao ensaio de tracção – compressão biaxial

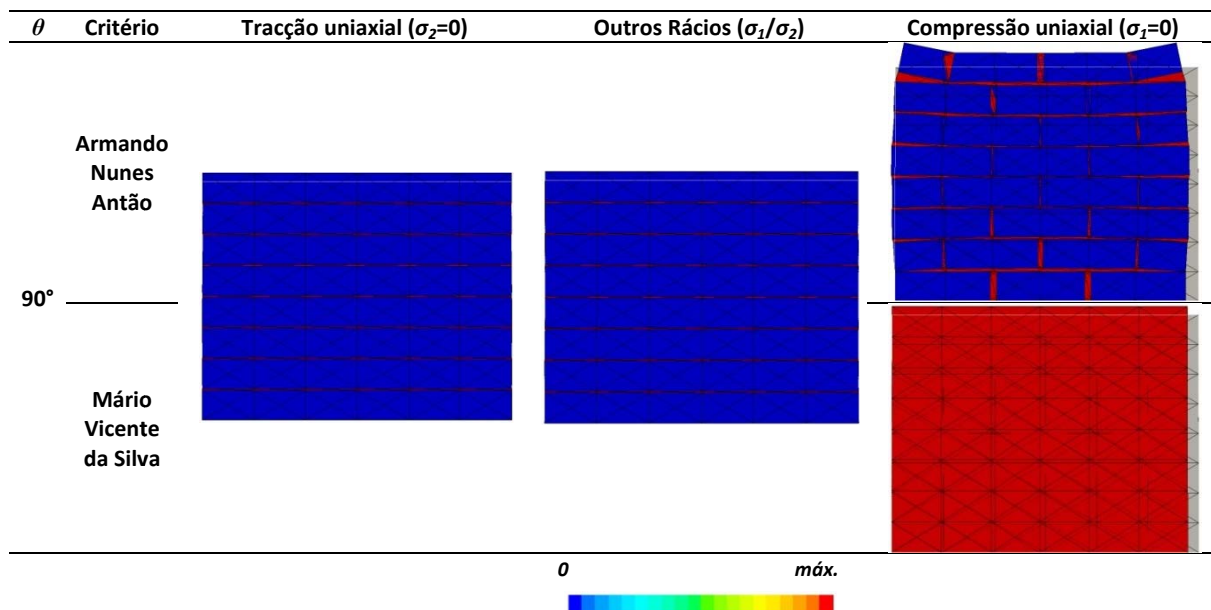


FIGURA 5.63 – Dissipação plástica e malha deformada obtidos pelo SUBLIM3d para os painéis do exemplo 3 com $\theta=90^\circ$, referente ao ensaio de tracção - compressão biaxial

5.2.2.5 Discussão dos resultados

Começa-se por apresentar a análise dos resultados apresentados (experimentais e teóricos) para cada um dos ensaios estudados:

- **Ensaio de Tracção biaxial:**

- Pela observação da Figura 5.38 à Figura 5.42, conclui-se que:
 - Os resultados obtidos são semelhantes tanto para o critério de [4] como para o critério de [5], como seria de esperar, porque ambos apresentam o mesmo tipo de truncatura à tracção;
 - Os resultados obtidos pelos critérios propostos majoram ou igualam sempre a estimativa obtida através da aplicação do método dos elementos finitos [10], provavelmente devido aos diferentes critérios de cedência das juntas utilizados;
 - Para a maioria dos ângulos ψ , o ângulo θ exerce uma grande influência na resistência dos painéis.

- Pela observação da Figura 5.53 à Figura 5.55, conclui-se que:
 - Para $\theta=90^\circ$, o aumento do ângulo ψ provoca a alteração do tipo de rotura, isto é, passa de uma rotura progressiva através de um número de juntas horizontais e verticais em padrões intensificados ($\theta = 90^\circ$, $\psi = 18^\circ$), para uma rotura ao longo dos planos das juntas horizontais ($\theta = 90^\circ$, $\psi=72^\circ$);
 - Com a diminuição do ângulo θ (para o mesmo ψ), mantêm-se o mesmo tipo de rotura mas aumenta-se a componente de corte.
- **Ensaio de Compressão biaxial:**
 - Pela observação da Figura 5.43 à Figura 5.47, conclui-se que:
 - Os resultados obtidos pelo critério do Mário Vicente da Silva majoram bastante a grande maioria dos resultados experimentais. A excepção a esta afirmação verifica-se quando a $\sigma_1=\sigma_2$, porque nestes casos não se consegue atingir a convergência da solução;
 - Os resultados obtidos pelo critério de Armando Nunes Antão demonstram uma boa semelhança em relação aos resultados experimentais;
 - Para a maioria dos rácios (σ_1/σ_2), o ângulo θ exerce uma pequena influência na resistência dos painéis, excepto quando uma das tensões principais é predominante;
 - Pela observação tanto da Figura 5.34 como da Figura 5.56 à Figura 5.58, conclui-se que:
 - Os modos de rotura obtidos pelo critério do Mário Vicente da Silva, para a compressão uniaxial, são semelhantes aos obtidos experimentalmente, excepto quando $\theta=0^\circ$ e $\sigma_2=0$;
 - Os modos de rotura obtidos pelo critério de Armando Nunes Antão, para a compressão uniaxial, são semelhantes aos obtidos experimentalmente, excepto quando $\theta=90^\circ$ e $\sigma_2=0$;
 - Para a compressão uniaxial, a rotura ocorre sempre num plano normal ao plano do painel. O aumento do ângulo θ provoca a alteração do tipo de rotura, isto é, passa de uma rotura que ocorre por fendilhação e deslizamento ao longo da junta horizontal e/ou vertical, para um mecanismo combinado envolvendo tanto a fendilhação dos tijolos como das juntas;
 - Para a compressão biaxial, a rotura ocorre tipicamente por divisão da amostra a metade da espessura (num plano paralelo à sua superfície livre), independentemente do ângulo θ . Para níveis elevados dos rácios (cerca de 10), a orientação da junta desempenha um papel importante e a rotura ocorre num mecanismo combinado envolvendo tanto a rotura da junta como a divisão lateral.
 - Por fim, apresentam-se alguns comentários:
 - Os efeitos da escala produzidos pelo uso da alvenaria a metade da escala não afectaram os resultados obtidos numericamente, porque a comparação é feita com um modelo teórico (SUBLIM3d) derivado de testes a metade da escala;
 - Quando não existe a possibilidade de rotura do tijolo num plano paralelo ao plano da parede da alvenaria, existe uma boa concordância entre os resultados obtidos experimentalmente e os resultados obtidos pelo SUBLIM3d. Caso contrário, quando existe a possibilidade de rotura do tijolo num plano paralelo ao plano da parede de alvenaria, existe uma maior

discrepância entre os resultados obtidos pelo SUBLIM3d e os resultados obtidos experimentalmente;

- **Ensaio de Tracção – Compressão biaxial:**

- Pela observação da Figura 5.48 à Figura 5.52, conclui-se que:
 - Os resultados obtidos pelo critério do Mário Vicente da Silva apresentam uma boa concordância com o envelope de rotura experimental, excepto nos casos em que o ângulo θ assume os valores de 90° (para os casos de $\sigma_2/\sigma_1=\{\infty;30\}$), de 22.5° e de 0° . Esta afirmação é justificada em parte para alguns casos, devido à incapacidade de convergência da solução;
 - Os resultados obtidos pelo critério de Armando Nunes Antão apresentam uma muito boa concordância com o envelope de rotura experimental, excepto nos casos em que o ângulo θ assume os valores 90° (para os casos de $\sigma_2/\sigma_1=\{\infty;30\}$), de 22.5° e de 0° ;
 - Para o painel $\theta=22.5^\circ$ sujeito a tracção uniaxial, a divergência entre os critérios propostos e os resultados experimentais é devido em parte à alteração da geometria do painel;
 - Para a maioria dos rácios (σ_2/σ_1), o ângulo θ exerce um papel importante na resistência dos painéis, onde esta resistência decresce significativamente com o aumento do ângulo θ .
- Pela observação tanto da Figura 5.35 como da Figura 5.59 à Figura 5.63, conclui-se que:
 - Para os casos de $\theta=22.5^\circ$ (outros rácios e $\sigma_1=0$) e de $\theta=45^\circ$ (outros rácios), os modos de rotura obtidos pelos critérios propostos não se assemelham aos obtidos experimentalmente;
 - Para os restantes casos o critério de Armando Nunes Antão e o de Mário Vicente da Silva são semelhantes aos obtidos experimentalmente, excepto para $\theta=0^\circ$ com $\sigma_1=0$ e para $\theta=90^\circ$ com $\sigma_1=0$, respectivamente;
 - Para todos os casos, a rotura ocorre num plano (ou planos) normal ao plano do painel por fendilhação apenas das juntas (tipo de rotura predominante), ou num mecanismo combinado envolvendo tanto os tijolos como as juntas.
- Por fim, apresentam-se alguns comentários (adicionais aos apresentados pelo ensaio de compressão biaxial):
 - Para $\theta=45^\circ$ e $\theta=67.5^\circ$, verifica-se que os picos encontram-se próximos do valor de transição. Este facto deve-se porque a rotura em ambos os casos ocorre sempre nas juntas, onde a queda na resistência para altos rácios deve-se ao início do aparecimento da tensão de tracção nas juntas [37];
 - Para $\theta=90^\circ$, verifica-se a mesma constatação apresentada no tópico anterior, mas neste caso como a junta horizontal está sempre em tracção não ocorre nenhum queda correspondente da resistência;
 - Para $\theta=0^\circ$ e 22.5° , a rotura é mais complexa com o plano de rotura a incluir várias vezes tanto os tijolos como as juntas, onde os efeitos do atrito nas juntas horizontais reforçam os painéis mesmo quando a tensão de tracção está presente na junta vertical. A queda para o envelope de rotura de $\theta=0^\circ$ deve-se à alteração do modo de rotura. Quando existe σ_2 o painel é reforçado pela resistência atrítica da junta horizontal, logo a rotura ocorrerá num plano transversal ao painel, num mecanismo envolvendo tanto os tijolos como as juntas. Por outro lado, quando $\sigma_2=0$, não existe este tipo de

reforço ocorrendo a rotura apenas nas juntas em forma de padrão, envolvendo tanto as juntas horizontais como as verticais.

Por fim, apresentam-se alguns comentários sobre as decisões tomadas:

- Tipo de apoio considerado (ver Figura 4.2): a visualização das deformadas apresentadas pelos diversos painéis (deformação quase nula na base e deformações significativas no topo), levou a questionar se o tipo de apoio seria o correcto, por isso executaram-se diversos testes (com mais e menos fiadas do que o considerado nos cálculos). Obtiveram-se nestes testes diferenças mínimas, permitindo assim afirmar que se optou pelo sistema de apoio correcto, que não tem qualquer influência no resultado;
- Propriedades dos materiais considerados: para chegar a estas propriedades passou-se por um vasto processo de discussão/interpretação/comparação de resultados que se apresenta sumariado de seguida. Inicialmente, optando-se pelas propriedades fornecidas por A. W. Page, observou-se que não havia uma boa semelhança entre os resultados obtidos pelo SUBLIM3d e os resultados obtidos experimentalmente. Por isso, para se obter um maior ajustamento global aos resultados obtidos experimentalmente, procedeu-se à optimização dessas propriedades. Essa optimização foi alcançada primeiro, através da compreensão da influência dos diversos parâmetros que definem a influência do comportamento dos materiais que constituem a alvenaria no comportamento global desta e, depois, pela escolha dos parâmetros que melhor reproduzem esse comportamento;
- Critérios que definem os materiais: apesar de neste exemplo ser possível existir deformação no sentido perpendicular ao plano da parede, continuou-se a supor a deformação plana nos critérios utilizados para simular o comportamento da alvenaria;
- Resultados experimentais/Propostas (capítulo 5.2.2.2): apenas se apresentaram os resultados (experimentais e teóricos) obtidos por A. W. Page, porque as restantes estimativas teóricas existentes na literatura baseiam-se no comportamento ortotrópico dos materiais;

5.2.3 Considerações finais

Em todos os exemplos analisados no capítulo 5.2, verifica-se que os resultados experimentais das alvenarias mostram tipicamente uma larga dispersão, o que dificulta a correcta comparação com os modelos teóricos.

No presente trabalho pretendeu-se comparar os resultados existentes (tanto experimentais como teóricos) com os regulamentos existentes, CEN [2], mas tal não foi possível devido não só à complexidade dos exemplos estudados como também devido a este regulamento ser mais específico para edifícios.

Poder-se-ia, eventualmente, chegar a um melhor acordo entre os resultados obtidos experimentalmente e os obtidos pelo SUBLIM3d caso estivessem disponíveis as propriedades dos materiais (tijolos e juntas) necessárias à utilização dos critérios propostos. Muitas das vezes, não há ensaios suficientes para a completa caracterização dos materiais que constituem a alvenaria. Outras das vezes, existindo esses ensaios, são de natureza de tal forma dispersa que não se coadunam com a análise determinística do problema.

Adicionalmente, o comportamento mecânico das alvenarias com elementos deformáveis não pode ser caracterizado com uma condição de deformação plana. No entanto, a utilização da condição de tensão plana é também discutível. Esta afirmação pode ser compreendida facilmente observando o ensaio de compressão uniaxial sobre um prisma de alvenaria (ver Figura 5.64). Neste ensaio, o material da junta tem tendência para se expandir lateralmente mais do que os tijolos, mas devido à ligação com estes fica confinada. Este confinamento provoca tensões de corte na interface unidade/junta, resultando assim, num estado interno de tensão, que consiste em compressão triaxial na junta enquanto nos tijolos se forma tensão no plano horizontal associada com compressão vertical (ver Figura 5.64). Este estado de tensão provoca o início de falhas de divisão verticais que podem conduzir à rotura do prisma.[39]

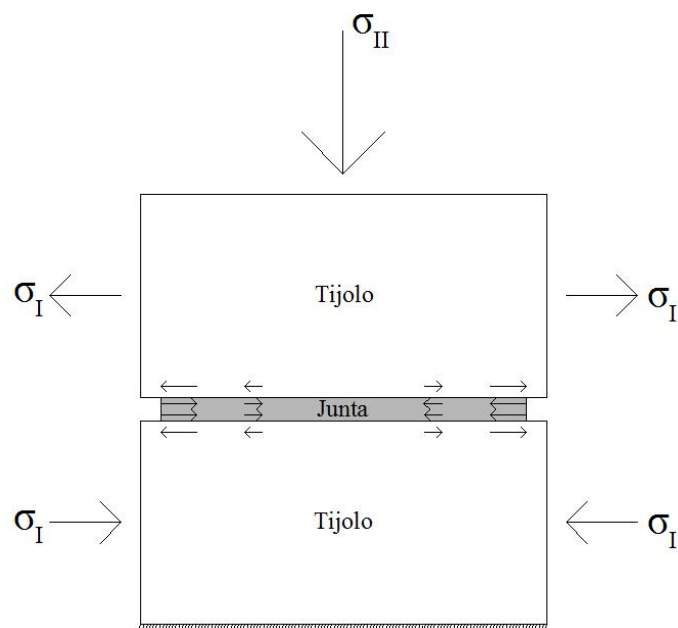


FIGURA 5.64 – Ensaio de compressão sob provetes de alvenaria e suas consequências

Capítulo 6

Conclusões e Desenvolvimentos futuros

Nesta dissertação efectuou-se inicialmente a definição do problema que originou este trabalho, através do seu enquadramento nos sistemas de alvenaria, no comportamento do material e nos métodos de resolução. De seguida caracterizou-se a ferramenta de cálculo utilizada no presente trabalho, SUBLIM3d, bem como se procedeu à implementação de dois critérios de cedência (propostos ao autor). Depois, procedeu-se à validação da implementação numérica destes critérios. Por fim, através da aplicação da ferramenta numérica desenvolvida a três exemplos numéricos, aferiu-se a capacidade do SUBLIM3d na determinação de cargas de colapso de sistemas de alvenaria.

6.1 Conclusão

Os dois exemplos de aplicação de critérios sem truncatura analisados serviram para validar a aplicabilidade do critério de Mohr – Coulomb na determinação de cargas de colapso de sistemas de alvenaria, apresentando ambos bons resultados, tanto em relação aos resultados experimentais como em relação aos resultados obtidos por outras estimativas teóricas.

Por outro lado, o exemplo de aplicação de critérios com truncatura analisado serve não só para aferir a capacidade dos modelos propostos como serve para validar a aplicabilidade dos critérios propostos, captando no exemplo a forma dos envelopes de rotura. O critério presente em [4] revelou-se ser aquele que apresenta melhores resultados, isto é, aquele que se aproxima mais dos valores obtidos experimentalmente.

Este exemplo demonstra que a escolha de critérios baseados na deformação plana não corresponde à melhor forma de representar o correcto comportamento da alvenaria. Contudo, a opção pela realização dos cálculos em condições de tensão plana poderá também não ser a mais representativa do comportamento da alvenaria. Assim sendo será necessário a efectivação de cálculos em condições tridimensionais de forma a verificar a capacidade do SUBLIM3d em representar o colapso da alvenaria nas mais diversas condições.

Mesmo assim, conclui-se por todos os exemplos analisados, da robustez, da precisão, da eficiência, do desempenho e da capacidade dos critérios analisados na determinação de cargas de colapso de sistemas de alvenaria.

Em retrospectiva final, conclui-se que o presente trabalho atingiu globalmente os objectivos definidos no início do trabalho, isto é, desenvolveu-se eficientemente a ferramenta numérica de elementos finitos existente no DEC, com vista à sua aplicação na determinação de cargas de colapso de sistemas de alvenaria. Com a inclusão destes dois novos critérios de cedência, a ferramenta numérica de elementos finitos existente no DEC apresenta também um aumento de capacidade para se tornar numa ferramenta poderosa para a avaliação de estruturas de alvenaria, na prática da engenharia, sendo possível oferecê-la no futuro aos analistas da alvenaria e aos projectistas ao nível micro.

6.2 Desenvolvimentos futuros

Em jeito de conclusão enuncia-se um conjunto de tópicos, relacionados em primeiro lugar com a ferramenta de cálculo e em segundo com os exemplos a analisar, que se considera interessantes, pretendendo-se explorá-los em trabalhos futuros.

- I. Em relação à ferramenta de cálculo:
 - Implementar uma análise dinâmica [40];
 - Desenvolver a ferramenta de cálculo para o teorema estático (teorema da região inferior);
 - Definir a utilização de critérios em condições de tensão plana, nomeadamente o critério de Mohr – Coulomb;
 - Definir tridimensionalmente os critérios apresentados no presente trabalho;
- II. Em relação aos exemplos a analisar:
 - Paredes com aberturas (Janelas e portas)[6];
 - Paredes de alvenaria em 3D [41];
 - Paredes de adobe reforçadas ou não [42];
 - Paredes de alvenaria sujeitas a momentos de flexão e de torção [43, 44];
 - Alvenarias curvas em 3D reforçadas ou não com FRP [45, 46];
 - Edifícios de alvenaria (incluindo catedrais)[16, 47];
 - Pontes de alvenaria em 2D e em 3D [17, 48, 49];
 - Túneis antigos de alvenaria [50];
 - Reforço de sistemas de alvenaria [17];
 - Sistemas de alvenaria com outro tipo de emparelhamento de pedras [51, 52].

Bibliografia

- [1] M. V. D. Silva, "Implementação Numérica Tridimensional do Teorema Cinemático da Análise Limite," Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade De Ciências e Tecnologia - Universidade Nova De Lisboa, Monte da Caparica, 2009.
- [2] *Eurocode 6 - Design of masonry structures*, B. CEN EN 1996-3, 2006.
- [3] *Commentary on specification for masonry structures*, USA ACI 530.1-02, 2004.
- [4] A. N. Antão, "Proposta da superfície de cedência para utilização no cálculo de cargas de colapso de sistemas de alvenaria." Almada: Comunicação particular, 2010.
- [5] M. Vicente da Silva, "Proposta da superfície de cedência para utilização no cálculo de cargas de colapso de sistemas de alvenaria." Almada: Comunicação particular, 2010.
- [6] P. J. B. B. Lourenço, "Computational strategies for masonry structures," Thesis (Ph.D.) - Delft University of Technology, 1996., Delft University Press, Delft, The Netherlands, 1996.
- [7] P. A. Cundall, "A computer model for simulating progressive large-scale movements in blocky rock systems," in *Proceedings of the International Symposium on Rock Fracture*, Nancy, France, 1971.
- [8] D. C. Drucker, *et al.*, "Soil mechanics and work hardening theories of plasticity," *Transactions ASCE*, vol. 122, pp. 338 - 346, 1957.
- [9] W.-F. Chen and D. C. Drucker, "Bearing capacity of concrete blocks or rock," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 95, pp. 955-978, 1969.
- [10] A. W. Page, "A biaxial failure criterion for brick masonry in the tension - tension range," *International Journal of Masonry Construction*, vol. 1, pp. 26 - 29, 1980.
- [11] H. R. Lotfi and P. B. Shing, "INTERFACE MODEL APPLIED TO FRACTURE OF MASONRY STRUCTURES," *Journal of Structural Engineering-Asce*, vol. 120, pp. 63-80, 1994.
- [12] P. DeBuhan and G. DeFelice, "A homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 45, pp. 1085-1104, 1997.
- [13] A. Orduña, "Seismic Assessment of Ancient Masonry Structures by Rigid Blocks Limit Analysis," Doctor of Philosophy, Department of Civil Engineering, University of Minho, Portugal, 2003.
- [14] A. W. Page, "FINITE-ELEMENT MODEL FOR MASONRY," *Journal of the Structural Division-Asce*, vol. 104, pp. 1267-1285, 1978.
- [15] D. J. Sutcliffe, *et al.*, "Lower bound limit analysis of unreinforced masonry shear walls," *Computers & Structures*, vol. 79, pp. 1295-1312, 2001.
- [16] G. Milani, *et al.*, "Homogenised limit analysis of masonry walls, Part II: Structural examples," *Computers & Structures*, vol. 84, pp. 181-195, 2006.
- [17] A. Orduna and P. B. Lourenco, "Cap model for limit analysis and strengthening of masonry structures," *Journal of Structural Engineering-Asce*, vol. 129, pp. 1367-1375, 2003.
- [18] A. Zucchini and P. B. Lourenco, "Mechanics of masonry in compression: Results from a homogenisation approach," *Computers & Structures*, vol. 85, pp. 193-204, 2007.
- [19] R. O. Davis and A. P. S. Selvadurai, *Plasticity and geomechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [20] S. P. dos Santos, "O contexto normativo recente dos eurocódigos sobre estruturas de alvenaria," presented at the Paredes de Alvenaria: Inovação e Possibilidades Actuais, Lisboa, Portugal, 2007.
- [21] P. B. Lourenço, "Experimental and numerical issues in the modelling of the mechanical behaviour of masonry," in *Structural analysis of historical constructions II*, P. Roca *et. al.* ed Barcelona: CIMNE, 1998, pp. 57-91.
- [22] J. Lubliner, *The Theory of Plasticity*. New York: Macmillan Publishing Company, 1990.
- [23] J. Salençon, *De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture*, 1^a ed. Paris: Les éditions de l'École Polytechnique, 2002.
- [24] M. Vicente da Silva and A. N. Antão, "Upper bound limit analysis with a parallel mixed finite element formulation," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, pp. 5788-5804, 2008.

- [25] M. V. da Silva and A. N. Antão, "A non-linear programming method approach for upper bound limit analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 72, pp. 1192-1218, Dec 2007.
- [26] A. Antão, "Analyse de la stabilité des ouvrages souterrains par une méthode cinématique régularisée," Thèse de Doctorat, Département de génie civil, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1997.
- [27] D. Oliveira, "Mechanical Characterization of Stone and Brick Masonry," Universidade do Minho, 2000.
- [28] L. F. Ramos, "Análise Experimental e Numérica de Estruturas Históricas de Alvenaria," Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, 2002.
- [29] D. V. Oliveira, "Experimental and numerical analysis of blocky masonry structures under cyclic loading," Doctor of Philosophy, Department of Civil Engineering, University of Minho, Minho, 2003.
- [30] P. B. Lourenco, *et al.*, "Dry joint stone masonry walls subjected to in-plane combined loading," *Journal of Structural Engineering-Asce*, vol. 131, pp. 1665-1673, 2005.
- [31] A. Orduna and P. B. Lourenco, "Three-dimensional limit analysis of rigid blocks assemblages. Part II: Load-path following solution procedure and validation," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 5161-5180, 2005.
- [32] P. B. Lourenco and J. G. Rots, "Multisurface interface model for analysis of masonry structures," *Journal of Engineering Mechanics-Asce*, vol. 123, pp. 660-668, 1997.
- [33] W. Mann and H. Muller, "FAILURE OF SHEAR-STRESSED MASONRY - AN ENLARGED THEORY, TESTS AND APPLICATION TO SHEAR WALLS," *Proceedings of the British Ceramic Society*, pp. 223-235, 1982.
- [34] P. Roca, *et al.*, "Mechanical response of dry joint masonry," presented at the Computer Methods in Structural Masonry - 5, U.K., 2001.
- [35] I. Carol, *et al.*, "Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, 2001.
- [36] A. W. Page, "THE BIAXIAL COMPRESSIVE STRENGTH OF BRICK MASONRY," *Proceedings of the Institution of Civil Engineers Part 2-Research and Theory*, vol. 71, pp. 893-906, 1981.
- [37] A. W. Page, "The Strength of brick masonry under biaxial compression - tension," *International Journal of Masonry Construction*, vol. 3, pp. 26 - 31, 1983.
- [38] G. Milani, *et al.*, "Homogenised limit analysis of masonry walls, Part I: Failure surfaces," *Computers & Structures*, vol. 84, pp. 166-180, 2006.
- [39] W. S. McNary and D. P. Abrams, "MECHANICS OF MASONRY IN COMPRESSION," *Journal of Structural Engineering-Asce*, vol. 111, pp. 857-870, 1985.
- [40] C. Q. Wu, *et al.*, "Dynamic response and damage analysis of masonry structures and masonry infilled RC frames to blast ground motion," *Engineering Structures*, vol. 27, pp. 323-333, Feb 2005.
- [41] G. Milani, "3D upper bound limit analysis of multi-leaf masonry walls," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, pp. 817-836, 2008.
- [42] T. Bakeer and W. Jager, "Collapse analysis of reinforced and unreinforced adobe masonry structures under earthquake actions - case study: Bam Citadel," in *Structural Studies, Repairs and Maintenance of Heritage Architecture X*. vol. 95, C. A. Brebbia, Ed., Southampton: Wit Press/Computational Mechanics Publications, 2007, pp. 577-586.
- [43] N. Mojsilovic and P. Marti, "Strength of masonry subjected to combined actions," *Acta Structural Journal*, vol. 94, pp. 633-642, 1997.
- [44] G. Milani, *et al.*, "A simple homogenized micro mechanical model for the analysis at the collapse of out-of-plane loaded masonry walls," presented at the XVII Congresso AIMETA di Meccanica Teorica e Applicata, Firenze, Itália, 2005.
- [45] G. Milani, *et al.*, "Upper Bound limit analysis model for FRP-reinforced masonry curved structures. Part I: Unreinforced masonry failure surfaces," *Computers & Structures*, vol. 87, pp. 1516-1533, Dec 2009.

Bibliografia

- [46] G. Milani, *et al.*, "Upper bound limit analysis model for FRP-reinforced masonry curved structures. Part II: Structural analyses," *Computers & Structures*, vol. 87, pp. 1534-1558, Dec 2009.
- [47] G. Milani, *et al.*, "3D homogenized limit analysis of masonry buildings under horizontal loads," *Engineering Structures*, vol. 29, pp. 3134-3148, 2007.
- [48] A. Cavicchi and L. Gambarotta, "Two-dimensional finite element upper bound limit analysis of masonry bridges," *Computers & Structures*, vol. 84, pp. 2316-2328, Dec 2006.
- [49] M. Gilbert and C. Melbourne, "Rigid-block analysis of masonry structures," *The structural Engineer*, vol. 72, pp. 356-361, 1994.
- [50] J. Dris, *et al.*, "Numerical modelling and mechanical behaviour analysis of ancient tunnel masonry structures," *Tunnelling and Underground Space Technology*, vol. 23, pp. 251-263, May 2008.
- [51] J. Pina-Henriques, "Masonry under compression: Failure Analysis and Long-Term Effects," Doctoral Thesis, Department of Civil Engineering, University of Minho, 2005.
- [52] G. Vasconcelos, "Experimental investigations on the mechanics of stone masonry: Characterization of granites and behavior of ancient masonry shear walls," Doctoral thesis, Department of Civil Engineering, University of Minho, 2005.